Série de TD N^0 1

Exercice 1

Soient $A = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 21 & -6 \\ 0 & 3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$, $D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$ *des matrices à coefficients dans* $\mathbb{R}$.

1. *Donner le type (la taille) de chaque matrice.*
2. *Calculer toutes les sommes possibles de deux de ces matrices.*
3. *Calculer* $3A + 2C$, $5B - 4D$ *et trouver le scalaire* α *tel que* $A - \alpha C$ *soit la matrice nulle.*
4. *Calculer tous les produits possibles de deux de ces matrices.*
5. *Calculer tous les carrés possibles de ces matrices.*

(Justifier à chaque fois pourquoi on peut ou on ne peut pas faire les calculs)

Exercice 2

1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) *Calculer* A^2, A^3 *et* A^4.
   (b) *En déduire une formule pour* A^p, $p \in \mathbb{N}$. *(Vérifier le résultat obtenu par récurrence pour tout* $p \in \mathbb{N}$*).*
2. *Soient* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ *et* $N = A - I_4$.
   (a) *Montrer que la matrice* N *est nilpotente* [1].
   (b) *À l'aide de la formule du binôme de Newton* [2], *calculer* A^p *pour* $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

1. *Soient* $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. *Calculer* $A^{-1}, B^{-1}, (AB)^{-1}, (BA)^{-1}$ *et* A^{-2}. [3]
2. *Calculer l'inverse de la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
3. *Soit* $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) *Claculer* $2A - A^2$.
   (b) *En déduire sans faire les calculs l'inverse* A^{-1} *de* A.

---

1. Une matrice N est nilpotente s'il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$.
2. $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} A^{p-k} B^k$ à condition que $AB = BA$!
3. On note par : $A^{-p} = (A^p)^{-1}$.