Série de TD N^0 2

Exercice 1

On note par $\mathbb{Z}[i]$ le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ donné par

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \ \mid \ (a;b) \in \mathbb{Z}^2 \text{ et } i^2 = -1\}$$

c'est l'ensemble des entiers de Gauss.

1. *Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous anneau de $\mathbb{C}$.*
2. *Trouver l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.*

Exercice 2

On rappel ici qu'un élément x d'un anneau A est nilpotent lorsqu'il existe un entier n strictement positif tel que $x^n = 0$. Soit A un anneau commutatif et x, y deux éléments nilpotents de A.

1. *Montrer que l'élément $x \cdot y$ est aussi nilpotent.*
2. *Est ce que l'élément $x + y$ est nilpotent ?*
3. *Montrer que pour tout $x \in A$ l'élément $1 - x$ est inversible, et calculer son inverse.*
4. *On pose maintenant que l'anneau A n'est pas commutatif.*
   (a) *Répond à la question (1.) dans ce cas.*
   (b) *On pose que $\forall x \in A : \ \ x^2 = x$. Démontrer dans ce cas que $\forall x \in A : \ \ x = -x$.*
   (c) *Montrer qu'un anneau vérifiant (4.(b)) est commutatif.*

Exercice 3 (Laisser aux étudiants)

Soit G un groupe additif abélien. On note par $\mathcal{E}nd(G)$ l'ensemble des endomorphismes sur G.
Démontrer que $(\mathcal{E}nd(G), +, \circ)$ est un anneau.

Exercice 4

Soit l'ensemble $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \ \mid \ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. *Montrer que $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau.*
2. *On note $\mathcal{N}(a + b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$. Montrer que*

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] : \ \ \mathcal{N}(xy) = \mathcal{N}(x)\mathcal{N}(y).$$

3. *En déduire que les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ sont les $a+b\sqrt{2}$ tels que $a^2-2b^2 \in \{-1, +1\}$.*

Exercice 5

Soit A un anneau commutatif, intègre et fini. Montrer que A est un corps.

Exercice 6

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif, et M une partie non vide de A. On rappel que l'annulateur d'un ensemble M de A est l'ensemble des x de A tel que $xy = 0$ pour tout y de M.
Montrer que l'annulateur de M est un idéal de A.

Exercice 7

On rappel ici qu'un nilradical d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$ est l'ensemble des éléments nilpotents de A.
Montrer que le nilradical d'un anneau A est un idéal de l'anneau A.

Exercice 8

Soient A un anneau commutatif unitaire et I un idéal de A. Le radical de I est donné par

$$\sqrt{I} = \{x \in A \ \mid \ \exists n \geq 1, \ \ x^n \in I\}$$

1. *Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A.*
2. *Soient I et J deux idéaux de A et p un entier de $\mathbb{N}^*$. Montrer que*

$$\sqrt{I \cdot J} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J} \ \ , \quad \sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I} \ \ \text{et} \quad \sqrt{I^p} = \sqrt{I}$$

3. *Pour $A = \mathbb{Z}$ et $I = mz, \ \ m \geq 1$, déterminer $\sqrt{I}$.*

Exercice 9

1. *Déterminer les idéaux premiers de $\mathbb{Z}$.*
2. *Soit I un idéal et $x \in A - I$. Soit J l'idéal engendré par I et x. Montrer que*

$$J = \{a \in A \text{ tel que } \exists i \in I, \ \exists k \in A : \ \ a = i + kx\}$$

3. *En déduire que tout idéal maximal est premier.*
4. *Montrer que si tout les idéaux de A sont premiers, alors A est un corps.*
5. *Montrer que si A est principal, tout idéal premier est maximal.*

Exercice 10

Déterminer le $PGCD(P,Q)$ dans chaque cas :

1. $P(X) = X^4 - 3x^3 + X^2 + 4$ *et* $Q(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$.
2. $P(X) = X^5 - X^4 + 2x^3 - 2X^2 + 2X - 1$ *et* $Q(X) = X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1$.
3. $P(X) = X^n - 1$ *et* $Q(X) = (X-1)^n, \ \ n \geq 1$.

Exercice 11

1. *Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme $P(x) = (x-2)^m + (x-1)^n - 1$ par $(x-1)(x-2)$ dans $\mathbb{Z}[x]$.*
2. *Si $\mathbb{K}$ est un corps, Montrer qu'un polynôme P*

Exercice 12

1. *Trouver deux polynômes U et V de $\mathbb{R}[X]$ tels que $AU + BV = 1$ où $A(X) = X^7 - X - 1$ et $B(X) = X^5 - 1$.*
2. *Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tels que $(X-1)^2$ divise $P(X)+1$ et $(X+1)^2$ divise $P(X)-1$.*

Exercice 13

1. *Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :*

   1. $X^4 + 1$ 2. $X^8 - 1$ 3. $X^4 - 6X^3 + 9X^2$ 4. $(X^2 - X + 1)^2 + 1$.

2. *En déduire une décomposition de $X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.*