Solution TD 1

Ex 1.2 :

$f(x)$ pour $x = 3$ et $x_1 = 3.01$
(x_1 : racine approchée par excès)

- $f(x) = ?$ pour $x = 3$ $f(x) = 65$; pour $x_1 = 3.01$ $f(x_1) = 65.37$
- l'erreur absolue sur $f(x)$? $\Delta f = |65 - 65.3705| = 0.3705$
  l'erreur relative sur f $\delta f = \dfrac{\Delta f}{|f(x)|} = \dfrac{0.3705}{65} = 5.7 * 10^{-3}$
- Comparaison : $\Delta x = |3 - 3.01| = 0.01$, donc $\Delta f = 37 \Delta x$
  donc l'erreur sur f est 37 fois l'erreur sur x.

Ex 1.3 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $e = (1+\varepsilon)e_1$ (e_1 : exacte) ; $\varepsilon = 0.0$

$-\Delta f$ (si $x = 1$) ; racine exacte ; $\Delta f = |f(x) - f(x_{approchée})|$

$\Rightarrow f(x) = a_1 x^4 + b_1 x^3 + c_1 x^2 + d_1 x + e_1$

$f(1) = a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + e_1$; $f_1(1) = (1+\varepsilon)(a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + e_1)$

$\Rightarrow \Delta f$ (si $x = 1$) $= \varepsilon f(1)$;

et Δf (si a, b, c, d, e sont exactes) $\simeq |x - x_1| |f'(x)| \simeq \varepsilon f'(1)$

Ex 1.4

$$f(x) = \frac{\pi x}{1 + x^2}$$

$\Rightarrow f(x) ?$ pour $x = 0.16037 \Rightarrow x_{approchée} = 0.\underbrace{160}_{\text{3 chiffres significatifs}}$

$\pi = 3.14 \Rightarrow \pi_{approchée} = 3.14$

Remplacer et calculer $f(x) =$ ______

- L'erreur absolue propagée $\Delta f = |f(x) - f(x_{approchée})| =$ ______
- l'erreur absolue d'arrondi $\Delta f = |f(x_{approchée}) - f_{approchée}(x_{approchée})| =$ ______
- l'erreur absolue totale $\Delta f = |f(x) - f_{app}(x_{approchée})| =$ ______

Solution TD2 (An-num 1)

Ex 2.1 1- $F \in C^2$, F monotone $\Rightarrow \exists \alpha \in [a,b] / f(\alpha)=0$ donc (Processus NR) Converge vers l'unique solu° α de $F(x)$

2- $|x_n - \alpha| \leq \frac{M}{2m}|x_{n-1}-\alpha|^2 \ \forall n>0$; M = majorant, m = minorant

$$\Leftrightarrow |x_n-\alpha| \leq \left(\frac{M}{2m}\right)^{2^n-1}|x_0-\alpha|^{2^n} \ \forall n>0 \ n\in\mathbb{N}.$$

$$|x_n-\alpha| \leq \frac{M}{2m}|x_{n-1}-\alpha|^2 \leq \frac{M}{2m}\left(\frac{M}{2m}|x_{n-2}-\alpha|^2\right)^2 \leq \ldots$$ par recurrence

on arrive à l'equivalence demandée.

Ex 2.2 : l'interpretation geométrique est l'étude de l'equation de la tangente de la fonc° F monotone sur $[a,b]$.

Ex 2.3 $x_0 = \frac{a+b}{2} = \frac{a_0+b_0}{2}$; $x_1 = \frac{a_1+b_1}{2} = \frac{a_0+b_0}{2^2}$, ... $x_n = \frac{a_n+b_n}{2} = \frac{a_0+b_0}{2^{n+1}}$

Comme f est monotone, donc $\exists \alpha \in [a,b] / f(\alpha)=0 \Leftrightarrow |x_n-\alpha| \leq \varepsilon$

et $|x_n-\alpha| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon$; d'ou $\frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon$

$$\Rightarrow (b-a) \leq 2^{n+1}(\varepsilon) \Rightarrow \ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) \leq (n+1)\ln 2$$

$$\Rightarrow n \geq \left[\ln\left(\frac{b_0-a_0}{\varepsilon}\right) * \frac{1}{\ln 2}\right] - 1$$

$$n \geq \frac{\ln(b_0-a_0/\varepsilon)}{\ln 2} - 1$$

Ex 2.4 a- f admet une racine separée sur $[\frac{1}{2}, 1]$: $f(\frac{1}{2}) * f(1) < 0$

b/- $x_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$; x_0 est tel que $f''(x_0) * f(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 = 1$

c/- $M = ?$ $x=1 \Rightarrow \sup f''(x) = M = 6$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$

- $m = ?$ $x = 1/2$; $\Rightarrow m = \inf(f'(x)) = 7/4$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$

d/ $\alpha ?$ $\varepsilon = 10^{-2}$; $x_0 = 1$; $x_1 = x_0 - \frac{f_0}{f'_0} = 0{,}64 \Rightarrow |x_1-\alpha| \leq \frac{M}{2m}|x_1-x_0|^2 = 0{,}22 > \varepsilon$

$x_2 = x_1 - \frac{f_1}{f'_1} = 0{,}67 \Rightarrow |x_2-\alpha| \leq \frac{M}{2m}|x_2-x_1|^2 = 0{,}0015 < \varepsilon$

donc x_2 = solu° approchée

Solution TD 3 (An-num 1)

Ex 3.1 : l'existence unique d'un polynôme est donnée ~~po~~ et démontrée par la relation $P_k(x_i) = f(x_i)$ avec k : degré $\leq$ aux nombre de points donnés.

Ex 3.2 : • $L_j(x) = \dfrac{\prod_{i=0}^{3}(x - x_i)}{\prod_{i=0}^{3}(x_j - x_i)}$ $\Rightarrow$ $\left\{ P_3(x) = \sum_{j=0}^{3} f(x_j) L_j(x_i) = 2x^3 + 4x^2 + 5x + 1 \right.$

$j = 0, 1, 2, 3$ $j \neq i$

(Lagrange)

• $P_3(x)$ (Newton) : appliquer les différences divisées et recalculer le $P_3(x)$: voir Cours.

on retrouve $P_3(x) = 2x^3 + 4x^2 + 5x + 1$

Ex 3.3

a) c'est le cours (voir chapitre 3)

b) $f(x_i) = \sqrt[3]{x_i}$; $f(1.0015) = \sqrt[3]{1.1015} = ?$

la fonc$^{\circ}$ racine cubique étant définie par le tableau de valeurs données. Le pas est régulier $h = 0.001$

en utilisant l'interpola$^{\circ}$ de Lagrange et d'après la première question on a $x_k = x_0 + k*h$; $0 \leq k \leq n$ et $x = x_0 + t*h$

donc pour $x = 1.0015$ alors on a $t = 1.5$ et donc on calcule les $\lambda_k(1.5)$, nous avons $\lambda_0(1.5) = -0.0625$; $\lambda_1(1.5) = 0.5625$

$\lambda_2(1.5) = 0.5625$ et $\lambda_3(1.5) = -0.0625$

$\sqrt[3]{1.0015} = P_3(1.0015) = \sum_{k=0}^{3} f_k(x_i) \lambda_k(1.5) = 1.000495$

pour $i = 0, \ldots 3$

Ex 3.4 $f(x) = e^{-x/10}$ sur $[0, 3]$; le degré du polynôme qui interpole f est 3 ; donc, on cherche $P_3(x)$ pour $x = 1.5$

$P_3(x) = \sum_{k=0}^{3} f_k(x_i) L_k(x)$; $L_k(x) = \dfrac{\prod_{i=0}^{3}(x - x_i)}{\prod_{i=0}^{3}(x_k - x_i)}$ $k \neq i$

$\Rightarrow P_3(1.5) = 0.860705$

Suite Solution TD3 (An-num 1)

- l'erreur d'interpolaᵗᵒ est $\mathcal{E}(x)$: d'après TAylor :

$$\mathcal{E}(x) \leq L(x) \cdot \frac{M}{(n+1)!} \quad \text{avec } M = \sup \left| f^{(n+1)}(\xi) \right|$$

pour $n=3 \Rightarrow f^{(4)}(x) = 10^{-4} e^{-x/10}$, on en déduit

$M = 10^{-4}$

et le majorant de $L(x)$ est 1 sur l'intervalle considéré d'où l'erreur $\mathcal{E}(x) \leq \frac{10^{-4}}{4!} = 4 \cdot 10^{-6}$

Ex 3.5

1/ $T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arc}\cos x)$, $x = \cos\theta$; $T_n(x) = \cos n\theta$

$\Rightarrow T_{n+1}(x) = \cos(n+1)\theta = \cos(n\theta)\cos\theta - \sin\theta \sin(n\theta)$

$T_{n-1}(x) = \cos(n-1)\theta = \cos(n\theta)\cos\theta + \sin\theta \sin(n\theta)$

$\Rightarrow T_{n+1}(x) = 2T_n(x) - T_{n-1}(x) \qquad T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x$

etc...

2/ calculons le produit scalaire $\langle T_n, T_k \rangle$

$$\langle T_n, T_k \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x) \times T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_0^{\pi} \cos n\theta \cos k\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi} \cos(n+k)\theta \, d\theta + \int_0^{\pi} \cos(n-k)\theta \, d\theta \right.$$

*/ si $n \neq k \Rightarrow \langle T_n, T_k \rangle = 0$

*/ si $n = k$:
- $n = 0 \Rightarrow \langle T_n, T_k \rangle = \pi$
- $n \neq 0 \Rightarrow \langle T_n, T_k \rangle = \pi/2$

Solution TD 4 (voir Chapitre 4 cours à la fin du cours)