Solution TD 01 2020/2021

Mesure et intégration

Exercice 01 :

2- On montre que : $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [1, 2+\frac{1}{n+1}] = [1, 2]$.

D'une part :

Soit $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [1, 2+\frac{1}{n+1}] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*\ 1 \leq x \leq 2+\frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow 1 \leq x \leq 2$ (par passage à la limite $n \to +\infty$)

$\Rightarrow x \in [1, 2]$. ... (*)

d'autre part : On a :

$\forall n \in \mathbb{N}^* : [1, 2] \subset [1, 2+\frac{1}{n+1}]$

$\Rightarrow [1, 2] \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} [1, 2+\frac{1}{n+1}]$ ... (**)

de (*) et (**) On a : $[1, 2] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} [1, 2+\frac{1}{n+1}]$.

1.* $\bigcap_{n\geq 1}]1-\frac{1}{n}, 2]$, On pose $A_n =]1-\frac{1}{n}, 2]$, alors $(A_n)_{n\geq 1}$ décroissante, de plus

$\bigcap_{n\geq 1}]1-\frac{1}{n}, 2] = \lim_n]1-\frac{1}{n}, 2] = [1, 2]$.

"puisque $1 \in]1-\frac{1}{n}, 2]\ \forall n \in \mathbb{N}^*$"

* $\bigcup_{n\geq 0} [\frac{1}{n+1}, +\infty[$, On pose $A_n = [\frac{1}{n+1}, +\infty[$ On remarque que $(A_n)_{n\geq 0}$ est croissante, alors,

$\bigcup_{n\geq 1} [\frac{1}{n+1}, +\infty[= \lim_n [\frac{1}{n+1}, +\infty[=]0, +\infty[$.

"puisque $0 \notin]0, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}$"

$*\ \bigcap_{n\geq 0}]1, 1+\frac{1}{n+1}] = \phi$ car :

$1 \notin]1, 1+\frac{1}{n+1}], \forall n \in \mathbb{N}$ ~~donc~~ donc : $1 \notin \bigcap_{n\geq 0}]1, 1+\frac{1}{n+1}]$
et $\forall x \neq 1, \exists n \in \mathbb{N}$ $x \notin]1, 1+\frac{1}{n+1}]$.
alors, $x \notin \bigcap_{n\geq 0}]1, 1+\frac{1}{n+1}]$.
Par suite :

$$\bigcap_{n\geq 0}]1, 1+\frac{1}{n+1}] = \phi.$$

3. $\lim_n [-\frac{1}{n}, 1] = \lim]-\frac{1}{n}, 1] = [0, 1]$.
en effet :
$([-\frac{1}{n}, 1])_{n\geq 1}$ et $(]-\frac{1}{n}, 1])_{n\geq 1}$ sont décroissante, alors

$\lim_n [-1/n, 1] = \bigcap_{n\geq 1} [-1/n, 1]$ et $\lim_n]-1/n, 1] = \bigcap_{n\geq 1}]-1/n, 1]$
alors,
si $x \in [0, 1] \Rightarrow$ $x \in [-1/n, 1]$ $\forall n \geq 0$

et

$x \in]-1/n, 1]$ $\forall n \geq 0$

donc : $x \in \bigcap_{n\geq 0} [-1/n, 1]$ et $x \in \bigcap_{n\geq 0}]-1/n, 1]$
alors :

$$[0, 1] \subset \bigcap_{n\geq 0} [-1/n, 1] \quad \text{et} \quad [0, 1] \subset \bigcap_{n\geq 0}]-1/n, 1]$$

Réciproquement :
$*$ soit $x \in \bigcap_{n\geq 1} [-1/n, 1] \Rightarrow \forall n \geq 1, -1/n \leq x \leq 1$
$\Rightarrow 0 \leq x \leq 1$ (Par passage à la limite $n \to +\infty$)
$\Rightarrow x \in [0, 1]$

et donc : $\bigcap_{n\geq 1} [-1/n, 1] \subset [0, 1]$

* Soit $x \notin [0,1] \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad x \in]-1/n, 1]$

$\Rightarrow x \notin \bigcap_{n\geq 1}]-1/n, 1]$

et donc:

$$\bigcap_{n\geq 1}]-1/n, 1] \subset [0,1]$$

et alors On a:

$$\bigcap_{n\geq 1} [-1/n, 1] = \bigcap_{n\geq 1}]-1/n, 1] = [0,1].$$

4. $A_n = [1/n, 1]$. $\lim_n A_n =]0,1]$.

On remarque que $0 \notin [1/n, 1]$, $\forall n \geq 1$.

5. On a: $(B_{2n})_{n\geq 1}$ et $(B_{2n-1})_{n\geq 1}$ sont des suites de parties décroissantes, alors,

$$\limsup_n B_n = \bigcap_{n\geq 1} \left(\bigcup_{k\geq n} B_k \right)$$

$$= \bigcap_{n\geq 1} \left(\left(\bigcup_{k\geq n} B_{2k} \right) \cup \left(\bigcup_{k\geq n} B_{2k-1} \right) \right)$$

$$= \bigcap_{n\geq 1} \left(\bigcup_{k\geq n} B_{2k} \right) \cup \bigcap_{n\geq 1} \left(\bigcup_{k\geq n} B_{2k-1} \right)$$

$$= \left(\lim_n B_{2n} \right) \cup \left(\lim_n B_{2n-1} \right) = [-1,2] \cup [-2,1]$$

$$= [-2,2].$$

"Puisque: (B_{2n}) et (B_{2n-1}) sont des suites décroissantes alors,

$$\limsup_n B_{2n} = \liminf_n B_{2n} = \lim_n B_{2n}$$

et $\limsup_n B_{2n-1} = \liminf_n B_{2n-1} = \lim_n B_{2n-1}$

de même :

$$\liminf_n B_n = \lim_n B_{2n} \cap \lim_n B_{2n-1}$$
$$= [-1,2] \cap [-2,1]$$
$$= [-1,1].$$

6. Non

Puisque :

$$\liminf_n C_n = [-2,1] \neq \limsup_n C_n = [-1,2].$$

Exercice 02 :

$$\mathcal{T} = f^{-1}(\mathcal{F}) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{F}\}.$$

On montre que : $\mathcal{T}$ est une σ-algèbre.

1) puisque $\mathcal{F}$ et une σ-algèbre, alors $\phi \in \mathcal{F}$
donc : $f^{-1}(\phi) \in f^{-1}(\mathcal{F})$, Ainsi $f^{-1}(\phi) = \phi$
Par suite $\phi \in f^{-1}(\mathcal{F})$.

2) Soit $A \in f^{-1}(\mathcal{F})$, alors $\exists B \in \mathcal{F}.\ A = f^{-1}(B)$.
d'autre part, On a :
$A^c = (f^{-1}(B))^c = f^{-1}(B^c)$ et Comme $\mathcal{F}$ st une σ-alg sur F, alors $B^c \in \mathcal{F}$ tq : $A^c = f^{-1}(B^c)$
donc $A^c \in f^{-1}(\mathcal{F})$

3) Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'ensemble de $\mathcal{T} = f^{-1}(B)$
alors,
$\forall n \geq 1,\ \exists B_n \in \mathcal{F} : A_n = f^{-1}(B_n)$, donc

$\bigcup_n A_n = \bigcup_{n\geq 1}(f^{-1}(B_n)) = f^{-1}(\bigcup_{n\geq 1} B_n)$ mais $\mathcal{F}$ st une σ-alg
Par suite,
$\exists \bigcup_{n\geq 1} B_n \in \mathcal{F} :\quad \bigcup_{n\geq 1} A_n = f^{-1}(\bigcup_{n\geq 1} B_n) \Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{T}$

donc $\mathcal{T}$ st une σ-alg

2) Si $\mathcal{T}$ est une σ-algèbre sur E, alors $f(\mathcal{T})$ n'est pas nécessairement une σ-algèbre sur F.

Soit $E = \{-1, 0, 1, 2\}$ $f : E \longrightarrow F$
$x \longrightarrow x^2$

et $F = \{0, 1, 4\}$, soit $\mathcal{T} = \{\phi, E, \{0, 1\}, \{-1, 2\}\}$

alors

$$f(\mathcal{T}) = \{\phi, F, \{0, 1\}, \{1, 4\}\}$$

$f(\mathcal{T})$ n'est pas une σ-algèbre sur F puisque

$$\{0, 1\}_F^c = \{4\} \notin f(\mathcal{T})$$

Exercice 04 : Soit $(E, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, ou μ est une <u>mesure de probabilité</u>, alors

$$\Gamma = \{A \in \mathcal{F},\ \mu(A) = 0 \vee \mu(A) = 1\} \qquad (\mu := \mathbb{P})$$

est une σ-algèbre sur E. en effet:

1) $\phi \in \Gamma$, puisque $\mu(\phi) = \mathbb{P}(\phi) = 0$

2) Soit $A \in \Gamma$ alors, $\mu(A) = 0 \vee \mu(A) = 1$.

On sait que $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

alors

$$\mu(A^c) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu(A) = 0 \\ 0 & \text{si } \mu(A^c) = 1 \end{cases}$$

donc : $A^c \in \Gamma$.

3. Soit $(A_n)_{n \geq 1} \in \Gamma$. On distingue deux cas

1er cas: $\forall n \geq 1$ $\mu(A_n) = 0$. alors

$$0 \leq \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n) = 0$$

donc: $\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = 0$ par suite $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \Gamma$.

2ème cas: $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$: $\mu(A_{n_0}) = 1$., alors, puisque:

$$A_{n_0} \subset \bigcup_{n\geq 1} A_n \Rightarrow \mu(A_{n_0}) \leq \mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n)$$

$\Rightarrow 1 \leq \mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n)$ puisque μ st une Proba-

alors

$\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = 1$. par suite $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \Gamma$.

et donc: Γ st une σ-algèbre.

Université Mostefa Ben Boulaïd - Batna 2
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques
Mathématiques Appliquées L3

TD 01

Exercice 3 *Soient $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_{2019}$ des ensembles non vide de $\mathbb{R}$ disjoints deux à deux avec $\bigcup_{k=1}^{k=2019} A_k = \mathbb{R}$. Montrer que*

$$\tau = \{\bigcup_{k \in I} A_k : I \subset \{1, 2, \ldots\ldots.., 2019\}\}$$

est une $\sigma-$algèbre sur $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice : 3

1. *On a*

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^{k=2019} A_k \quad avec \quad I = \{1, 2, 3, ..., 2019\} \subset \{1, 2, 3, ..., 2019\}.$$

Cela vaut dire que $\mathbb{R} \in \tau$

2. *Soit $A \in \tau$ alors $A = \bigcup_{k \in I} A_k : I \subset \{1, 2, \ldots\ldots.., 2019\}$. On a*

$$A^{\mathcal{C}} = \bigcup_{k \in J} A_k \quad avec \quad avecj = \{1, 2, \ldots\ldots.., 2019\} - I \subset \{1, 2, 3, ..., 2019\}.$$

Cela vaut dire que $A^{\mathcal{C}} \in tau$

3. *Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \tau$ alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a*

$$A_i = \bigcup_{k \in I_i} A_k : I_i \subset \{1, 2, \ldots\ldots.., 2019\}.$$

On a

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{k \in I_i} A_k \right) = \bigcup_{k \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}}} I_i \quad avec \quad \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i \subset \{1, 2, 3, ..., 2019\}.$$

Cela vaut dire que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \tau$.

Alors d'après 1), 2) et 3) τ est une $\sigma-$algèbre sur $\mathbb{R}$.

Exercice 05 : Soit $C = \{[a,b],\ a \leq b$ et $a,b \in]0,1[\}$

On montre que $\sigma(C) = \mathcal{B}(]0,1[)$.

1* On montre que $\sigma(C) \subset \mathcal{B}(]0,1[)$.

il suffit de montrer que $C \subset \mathcal{B}(]0,1[)$, alors

Soit $I \in C$, $\exists\, a,b \in]0,1[$, $a \leq b$ et $I = [a,b]$

On remarque que $[a,b] \subset]0,1[\in \mathcal{B}(]0,1[)$

Comme $[a,b]$ est un fermé de $]0,1[$ et $\mathcal{B}(]0,1[)$ est la tribu engendrée par les ouverts et les fermés de $]0,1[$ donc $[a,b] \in \mathcal{B}(]0,1[)$

alors $C \subset \mathcal{B}(]0,1[)$ est puisque $\sigma(C)$ est la plus petite tribu contenant C donc

$$\sigma(C) \subset \mathcal{B}(]0,1[)$$

2* réciproquement, on montre $\mathcal{B}(]0,1[) \subset \sigma(C)$.

On pose $L = \{\theta \mid \theta$ ouvert de $]0,1[\}$

On sait $\sigma(L) = \mathcal{B}(]0,1[)$, alors il suffit de montrer que $L \subset \sigma(C)$.

Soit $\theta \in L$, alors θ est un ouvert de $]0,1[$ de plus θ est l'union dénombrable d'intervalle $]a,b[$ ou $0 < a \leq b < 1$.

$$\theta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}]a_n, b_n[.$$

de même, on peut montrer que

$$]a_n, b_n[= \bigcup_{n \geq 1} [a_n + \tfrac{1}{n}, b - \tfrac{1}{n}].$$

On a :

$[a_n + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}] \in C \subset \sigma(C)$, alors

$[a_n + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}] \in \sigma(C)$ ($\sigma(C)$ est stable par union dénombrable)

$\Rightarrow \bigcup_{n \geq 1} [a_n + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}] \in \sigma(C)$

Exercice 05 : Soit $C = \{[a,b],\ a \leq b \text{ et } a,b \in]0,1[\}$

On montre que $\sigma(C) = \mathcal{B}(]0,1[)$.

1* On montre que $\sigma(C) \subset \mathcal{B}(]0,1[)$.

il suffit de monter que $C \subset \mathcal{B}(]0,1[)$, alors

Soit $I \in C$, $\exists a,b \in]0,1[$, $a \leq b$ et $I = [a,b]$

On remarque que $[a,b] \subset]0,1[\in \mathcal{B}(]0,1[)$

Comme $[a,b]$ est un fermé de $]0,1[$ et $\mathcal{B}(]0,1[)$ est la tribu engendrée par les ouverts et les fermés de $]0,1[$ donc $[a,b] \in \mathcal{B}(]0,1[)$

alors $C \subset \mathcal{B}(]0,1[)$ est puisque $\sigma(C)$ est la plus petite tribu contenant C donc

$$\sigma(C) \subset \mathcal{B}(]0,1[)$$

2* réciproquement, on monte $\mathcal{B}(]0,1[) \subset \sigma(C)$.

On pose $L = \{\theta \mid \theta \text{ ouvert de }]0,1[\}$

On sait $\sigma(L) = \mathcal{B}(]0,1[)$, alors il suffit de monter que $L \subset \sigma(C)$.

Soit $\theta \in L$, alors θ est un ouvert de $]0,1[$ de plus θ est l'union dénombrable d'intervalle $]a,b[$ ou $0 < a < b < 1$.

$$\theta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}]a_n, b_n[.$$

de même, on peut montrer que

$$]a_n, b_n[= \bigcup_{n \geq 1} [a_n + \tfrac{1}{n}, b - \tfrac{1}{n}].$$

On a :

$[a_n + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}] \in C \subset \sigma(C)$, alors

$[a_n + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}] \in \sigma(C)$ ($\sigma(C)$ est stable par union dénombrable)

$\Rightarrow \bigcup_{n \geq 1} [a_n + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}] \in \sigma(C)$

par suite $]a_n, b_n[\in \sigma(C)$ ainsi $\bigcup_{n\geq 1}]a_n, b_n[\in \sigma(C)$
donc

$$\theta \in \sigma(C)$$

alors $L \subset \sigma(C)$ ceci implique que $\sigma(L) \subset \sigma(C)$
par suite $\mathcal{B}(]0,1[) \subset \sigma(C)$.

Exercice 06 :

Soit A un borélien de $\mathbb{R}$ tel que $\lambda(A) > 1$ et

$$A_n = A \cap [n, n+1[$$

On montre que : $A = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} A_n$

On remarque que $([n, n+1[)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une partition de $\mathbb{R}$, puisque
$([n, n+1[)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont deux à deux disjoints,
de plus $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1[= \mathbb{R}$

alors
$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} ([n, n+1[\cap A) = A \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1[\right) = A \cap \mathbb{R} = A.$$

De plus par invariance par translation de la mesure de lebesgue, on a :

$$\lambda(A_n) = \lambda(A_n - n) = \lambda((A-n) \cap [0,1[) \quad \text{---} (*)$$

alors
$$\lambda(A) = \lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} A_n\right) = \lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (A \cap [n, n+1[)\right)$$

On a : $(A \cap [n, n+1[)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont deux à deux disjoints
alors

$$\lambda(A) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda(A \cap [n, n+1[)$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda((A-n)\cap[0,1[) \text{ (d'après (*))}.$$

<u>Exercice 07:</u> Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ l'espace mesuré de Lebesgue

Pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ on note

$$A + a = \{x + a \mid x \in A\}$$

1. On Montre que $\mathcal{T}_a = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : A + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. est une σ-alg

1* On a: $\mathbb{R} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R} + a = \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. donc

$\mathbb{R} \in \mathcal{T}_a$

2* Soit $A \in \mathcal{T}_a$, alors $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $A + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

puisque $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sont des σ-alg alors sont stable par passage au Complémentaire

$A^c \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $(A+a)^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

mais $(A+a)^c = A^c + a$, par suite

$A^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $A^c + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow A^c \in \mathcal{T}_a$.

3* Soit $(A_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{T}_a$ alors,

$\forall n \geq 1$, $A_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $(A_n + a) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Comme $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sont stable par union dénombrable, alors

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \text{ et } \bigcup_{n\geq 1}(A_n + a) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

mais $\bigcup_{n\geq 1}(A_n + a) = \left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) + a$

alors

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \text{ et } \left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{T}_a$$

donc d'après 1, 2 et 3 $\mathcal{T}_a$ est une σ-alg

2. On montre que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = T_a$.

* Montrons que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset T_a$.

On a : $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(C)$, avec $C = \{]x,y], \; x, y \in \mathbb{R} \; x \leq y \}$

alors il suffit de montrer que

$$C \subset T_a.$$

Soit $I \in C$, $\exists \, x, y \in \mathbb{R} \;\; x \leq y \; : \; I =]x,y]$

alors $I =]x,y] \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et

$$I + a =]x,y] + a =]x+a, y+a] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

puisque $]x+a, y+a]$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, donc

On a montrer que

$$I \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \text{ et } I + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \quad I \in T_a$$

alors $C \subset T_a \Rightarrow \sigma(C) \subset T_a$

finalement : $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset T_a$. ---(1)

* Maintenant, montrons que $T_a \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Tout d'abord remarquons que

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset T_{-a} \quad \text{avec}$$

$$T_{-a} = \{ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mid A - a \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$$

alors, soit $A \in T_a \Rightarrow A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $A + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset T_{-a}$, alors

$$(A+a) \in T_{-a} \Rightarrow (A+a) - a \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

et donc $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

par suite $T_a \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -- (2)

de (1) et (2) On a :

$$T_a = \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

3. $\mu(A) = \lambda(A+a)$. On montre que μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

1)* $\mu(\phi) = \lambda(\phi + a) = \lambda(\phi) = 0$ (puisque λ est une mesure)

2)* Soit $(A_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ disjoints 2 à 2, on a :

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \lambda\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n + a\right)$$

$$= \lambda\left(\bigcup_{n\geq 1} (A_n + a)\right)$$

Comme $(A_n + a)_{n\geq 1}$ sont encore 2 à 2 disj, on obtient

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \lambda\left(\bigcup_{n\geq 1}(A_n + a)\right) = \sum_{n\geq 1} \lambda(A_n + a)$$

$$= \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$$

donc μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

4) On montre $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\lambda(A+a) = \lambda(A)$.

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ on a :

$$\mu(]x,y]) = \lambda(]x,y] + a) = \lambda(]x+a, y+a])$$

$$= (y+a) - (x+a)$$

$$= y - x = \lambda(]x,y])$$

On remarque que λ et μ coincident sur le demi-anneau des intervalles $]x,y]$ et comme λ mesure de Lebesgue est σ-finie donc d'après le Théorème (ci-dessous) λ et μ coincident sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a donc :

$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$: $\mu(A) = \lambda(A)$

Par suite :

$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$: $\lambda(A + a) = \lambda(A)$.

Théorème : (Prolongement d'une mesure) : Soit Ω un ensemble, S un demi-anneau et $\mu : S \to \overline{\mathbb{R}}_+$

M

une fonction σ-additive sur S, c-à-d pour toute suite d'éléments $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de S, deux à deux disjoints

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Alors, il existe une mesure μ' définie sur la tribu $\mathcal{T} = \sigma(S)$, et prolongeant μ (c-à-d : $\forall A\in S$ $\mu'(A) = \mu(A)$)
De plus si μ est σ-finie (c-à-d $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $A_n \in S$ et $\mu(A_n) < \infty$) alors le prolongement μ' est unique.

Exercice 08 : 1) Soit $A = \bigcup_{n\geq 1} [n, n+\frac{1}{2^n}]$.
On a, $([n, n+\frac{1}{2^n}])_{n\geq 1}$ disj deux à deux
alors,

$$\lambda\left(\bigcup_{n\geq 1} [n, n+1/2^n]\right) = \sum_{n\geq 1} \lambda([n, n+1/2^n]) = \sum_{n\geq 1} 1/2^n =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 1/2 \left(\frac{1-(1/2)^n}{1-1/2}\right) = 1.$$

2) Soit $x\in\mathbb{R}$, On a :

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty}]x - 1/n, x + 1/n[$$

Par le théorème de la continuité décroissante On a :

$$\lambda(\{x\}) = \lim_{n\to+\infty} \left(\lambda(]x-1/n, x+1/n[)\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 2/n = 0.$$

3. On a : $\lambda\left(\bigcup_{n\geq 0} \{x_n\}\right) \leq \sum_{n\geq 0} \lambda(\{x_n\}) = 0$

alors $\lambda\left(\bigcup_{n\geq 0} \{x_n\}\right) = 0.$

L

4. Puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable, alors d'après 3. $\lambda(\mathbb{Q})=0$

$\lambda([0,1]\setminus\mathbb{Q}) = ?$

Soit $A=\{x\in\mathbb{Q},\ x\in[0,1]\}$, $A\subset\mathbb{Q}$.

On remarque que:

$$\lambda([0,1]\setminus\mathbb{Q}) = \lambda([0,1]\setminus A) = \lambda([0,1]) - \lambda(A)$$
$$= 1$$