Corrigé TD 02

Exercice 01 : $f : (E, \mathcal{T}) \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ tel que f mesurable,

On montre que : $\forall \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, $\{x \in E, f(x) = \alpha\}$ est mesurable,

donc On montre que $\forall \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$\{x \in E, f(x) = \alpha\} \in \mathcal{T}.$$

1) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, On a : $\{x \in E, f(x) = \alpha\} = \{x \in E, f(x) \leq \alpha\} \cap \{x \in E, f(x) \geq \alpha\}$

$$= f^{-1}([\alpha, +\infty[) \cap f^{-1}(]-\infty, \alpha])$$

Puisque f est mesurable, alors $f^{-1}([\alpha, +\infty[) \in \mathcal{T}$ et $f^{-1}(]-\infty, \alpha]) \in \mathcal{T}$ et donc :

$$f^{-1}([\alpha, +\infty[) \cap f^{-1}(]-\infty, \alpha]) \in \mathcal{T}$$

puisque $\mathcal{T}$ est une tribu, donc $\{x \in E, f(x) = \alpha\} \in \mathcal{T}$

<u>Ou bien</u> :

$$\{x \in E, f(x) = \alpha\} = f^{-1}(\{\alpha\})$$

On a : $\{\alpha\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et Comme f est mesurable alors $f^{-1}(\{\alpha\}) \in \mathcal{T}$, et donc :

$$\{x \in E, f(x) = \alpha\} \in \mathcal{T}$$

2) $\alpha = +\infty$: $\{x \in E, f(x) = +\infty\} = \{x : \forall n \in \mathbb{N}^* \; f(x) > n\}$

$$= \bigcap_{n \geq 1} \{x \in E, f(x) > n\}$$

$$= \bigcap_{n \geq 1} f^{-1}(]n, +\infty]) \in \mathcal{T}$$

3. $\alpha=-\infty$, $\{x\in E,\ f(x)=-\infty\}=\{x\in E,\ \forall n\geq 1\ \ f(x)<-n\}$

$$=\bigcap_{n\geq 1}\{x\in E,\ f(x)<-n\}$$

$$=\bigcap_{n\geq 1} f^{-1}(]-\infty,-n[)\in \mathcal{T}.$$

2- * $(f=g)=\{x\in E,\ f(x)=g(x)\}$

$$=\{x\in E,\ f(x)-g(x)=0\}$$

$$=\{x\in E,\ (f-g)(x)=0\}=(f-g)^{-1}(\{0\})$$

Comme f et g sont mesurable, alors $f-g$ est mesurable, alors $(f-g)^{-1}(\{0\})\in \mathcal{T}$

* $(f\neq g)=(f=g)^{c}\in \mathcal{T}$

Puisque $(f=g)\in \mathcal{T}$ et $\mathcal{T}$ est une σ-alg.

* $(f>g)=\{x\in E,\ f(x)>g(x)\}$

$$=\{x\in E,\ f(x)-g(x)>0\}$$

$$=\{x\in E,\ (f-g)(x)>0\}=(f-g)^{-1}(]0,+\infty[)$$

<u>Exercice 02</u>: 1) Soient $f,g:(E,\mathcal{T})\to\mathbb{R}$ deux fonctions mesurables, On montre que $|f|$, $\sup(f,g)$, $\inf(f,g)$

* Soit $\alpha\in\mathbb{R}$

$$|f|^{-1}(]-\infty,\alpha])=\{x\in E,\ |f(x)|\leq\alpha\}$$

$$=\{x\in E,\ -\alpha\leq f(x)\leq\alpha\}$$

$$=\{x\in E,\ f(x)\leq\alpha\}\cap\{x\in E,\ f(x)\geq-\alpha\}$$

$= f^{-1}(]-\infty, \alpha]) \cap f^{-1}([-\alpha, +\infty[) \in T$

$\underset{T}{\nearrow} \qquad \qquad \in T$

donc, $|f|^{-1}(]-\infty, \alpha]) \in T$, finalement $|f|$ et mesurable.

$*$ soit $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sup(f, g)^{-1}(]-\infty, \alpha]) = \{x \in E, \sup(f, g) \leq \alpha\}$$

$$= \{x \in E, \quad f \leq \alpha \wedge g \leq \alpha\}$$

$$= \{x \in E, f \leq \alpha\} \cap \{x \in E, g \leq \alpha\}$$

$$= \underbrace{f^{-1}(]-\infty, \alpha])}_{\in T} \cap \underbrace{g^{-1}(]-\infty, \alpha])}_{\in T} \in T$$

donc $\sup(f, g)$ st mesurable.

$*$ soit $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{Inf}(f, g)^{-1}([\alpha, +\infty[) = \{x \in E, \operatorname{Inf}(f, g) \geq \alpha\}$$

$$= \{x \in E, \quad f \geq \alpha \wedge g \geq \alpha\}$$

$$= \{x \in E, f \geq \alpha\} \cap \{x \in E, g \geq \alpha\}$$

$$= \underbrace{f^{-1}([\alpha, +\infty[)}_{T} \cap \underbrace{g^{-1}([\alpha, +\infty[)}_{T} \in T$$

donc $\operatorname{Inf}(f, g)$ st mesurable.

2) Soit $f : (E, T) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in A^c \end{cases} \quad \text{avec } A \notin T.$$

donc f n'est pas mesurable.

Par Contre $|f| = 1$, $\forall x \in E$.

$|f|$ est une fonction Constante, alors elle est mesurable., On déduit que

$$|f| \text{ est mesurable} \not\Rightarrow f \text{ est mesurable}$$

Par Contre

$$f \text{ est mesurable} \Rightarrow |f| \text{ est mesurable.}$$

Exercice 03: $f_n : (E, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une suite de f^{ct} mesurables, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$

On suppose que $f_n \xrightarrow{C.S} f$ $\forall x \in E$, et on montre que: f est mesurable.

On a: puisque $\lim\limits_n f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in E$, alors

$$\lim_n f_n(x) = \overline{\lim} f_n(x) = \underline{\lim} f_n(x) = f(x) \quad \text{—(I)}$$

alors, pour montrer que $f \in \mathcal{T}$ il suffit de montrer que

$\underline{\lim} f_n \in \mathcal{T}$ et $\overline{\lim} f_n \in \mathcal{T}$.

avec:

$$\overline{\lim} f_n = \inf_{n \geq 1} \left(\sup_{k \geq n} f_k \right) \text{ et } \underline{\lim} f_n = \sup_{n \geq 1} \left(\inf_{k \geq n} f_k \right)$$

On a:

$$* \left(\sup_{n \geq 1} f_n \right)^{-1} (]-\infty, \alpha]) = \{ x \in E, \sup_{n \geq 1} f_n(x) \leq \alpha \}$$

$$= \{ x \in E, \forall n \geq 1 \ f_n(x) \leq \alpha \}$$

$$= \bigcap_{n \geq 1} \{ x \in E, \ f_n(x) \leq \alpha \}$$

$$= \bigcap_{n \geq 1} f_n^{-1} (]-\infty, \alpha]) \in \mathcal{T} \quad \text{--- (2)}$$

"puisque $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de f^{ct} mesurables".

$$* \left(\inf_{n \geq 1} f_n \right)^{-1} ([\alpha, +\infty[) = \{ x \in E, \inf_{n \geq 1} f_n(x) \geq \alpha \}$$

$$= \{ x \in E, \forall n \geq 1 \ f_n(x) \geq \alpha \}$$

$$= \bigcap_{n \geq 1} \{ x \in E, f_n(x) \geq \alpha \}$$

$$= \bigcap_{n\geq 1} f_n^{-1}([\alpha, +\infty[) \in \mathcal{T} \text{ --- } (2)$$

"puisque f_n est une suite de fonction mesurable"

Ou bien On montre que:

$$(\inf f_n)^{-1}(]-\infty, \alpha]) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{x\in E,\ f_n(x) \leq \alpha\} \text{ --- } (*)$$

en effet, soit $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x\in E,\ f_n(x) \leq \alpha\}$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \{x\in E,\ f_{n_0}(x) \leq \alpha\}$

$\Rightarrow f_{n_0}(x) \leq \alpha \quad \Rightarrow \inf_{n\geq 1} f_n(x) \leq f_{n_0}(y) \leq \alpha$

donc, $\inf_{n\geq 1} f_n(x) \leq \alpha$

$\Rightarrow x \in \{x\in E,\ \inf_{n\geq 1} f_n(x) \leq \alpha\}$

$\Rightarrow x \in (\mathrm{Inf}\, f_n)^{-1}(]-\infty, \alpha])$

d'autre par (Par la Contraposée)

soit $x \notin \bigcup_{n\geq 1} \{x\in E,\ f_n(x) \leq \alpha\}$

$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*,\ x \notin \{f_n \leq \alpha\}$

$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*,\ x \in \{f_n > \alpha\}$

$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \inf f_n(x) > \alpha$

$\Rightarrow x \in (\inf f_n)^{-1}(]\alpha, +\infty[)$

$\Rightarrow x \notin (\inf f_n)^{-1}(]-\infty, \alpha])$

et donc On a montrer $(*)$

alors, $\left(\inf f_n\right)^{-1}(]-\infty,\alpha]) = \bigcup_n f_n^{-1}(]-\infty,\alpha]) \in T$ (2)

donc d'après (1) et (2) $\sup_{n\geq 1} f_n$ et $\inf_{n\geq 1} f_n$

sont des fonction mesurable, de plus

$\overline{\lim} f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\sup_{k\geq n} f_k\right) = \inf_{n\geq 1} h_n$

avec $h_n = \sup_{k\geq n} f_k$

d'après (1) $(h_n)_n$ est mesurable, et d'après (2) $\inf_{n\geq 1} h_n$ est mesurable. par suite :

$\overline{\lim} f_n = \inf_{n\geq 1}\left(\sup_{k\geq n} f_k\right) \in T$ (est mesurable)

même chose, pour $\underline{\lim} f_n$

$\underline{\lim} f_n = \sup_{n\geq 1}\left(\inf_{k\geq n} f_k\right) = \sup_{n\geq 1} g_n$ avec

$g_n = \inf_{k\geq n} f_k.$

d'après (2), $(g_n)_n$ est mesurable, et d'après (1) $\sup_{n\geq 1} g_n$ est mesurable. par suite

$\underline{\lim} f_n = \sup_{n\geq 1}\left(\inf_{k\geq n} f_k\right) \in T$ (est mesurable)

· Finalement d'après (I)

$\lim_n f_n(x) = \overline{\lim_n} f_n = \underline{\lim} f_n = f(x)$

donc $f(x) \in T$

$=$ "$\forall x \in E$ $f(x)$ est mesurable"

Exercice 04: Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, On munit $\mathbb{R}$ par $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

1) Si f est Continue, alors f est mesurable.

Soit O un ouvert dans $\mathbb{R}$, Comme f est Continue alors $f^{-1}(O)$ est aussi un ouvert de $\mathbb{R}$, et puisque $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}$, on trouve

$$\forall O \text{ ouvert} : f^{-1}(O) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

donc f est mesurable.

2) $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, f mesurable et dérivable, On montre que f' est mesurable.

$$\forall x \in [a,b] : f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{f(x+1/n) - f(x)}{1/n}$$

alors $f'(x) = \lim_{n} h_n$ avec

$$h_n = n\left(f(x+1/n) - f(x)\right)$$

puisque f est mesurable, alors $(h_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions mesurables.
de plus

$$\lim_{n} h_n = f' \quad \text{c.s.}$$

d'après l'exercice 03 f' est mesurable.

Exercice 05: $f : E \to \mathbb{R}$ une f^{ct} mesurable, $\alpha > 0$.

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} f(x) & si \ |f(x)| \leq \alpha \\ \alpha & si \ f(x) > \alpha \\ -\alpha & si \ f(x) < -\alpha \end{cases}$$

1) * Si $|f(x)| \leq \alpha$. On a:

$sing(f(x)) = \dfrac{f(x)}{|f(x)|}$ et $\min(|f(x)|, \alpha) = |f(x)|$.

Par suite:

$sing(f(x)) \cdot \min(|f(x)|, \alpha) = \dfrac{f(x)}{|f(x)|} \cdot |f(x)| = f(x) = f_\alpha(x)$. —(1)

* Si $f(x) > \alpha$. et $\alpha > 0$ On a:

$sing(f(x)) = \dfrac{f(x)}{|f(x)|} = \dfrac{f(x)}{f(x)} = 1$ et $\min(|f(x)|, \alpha) = \alpha$

et donc:

$sing(f(x)) \cdot \min(|f(x)|, \alpha) = 1 \cdot \alpha = \alpha = f_\alpha(x)$ —(2)

* Si $f(x) < -\alpha$ et $-\alpha < 0$ On a:

$sing(f(x)) = \dfrac{f(x)}{|f(x)|} = \dfrac{f(x)}{-f(x)} = -1$ et $\min(|f(x)|, \alpha) = \alpha$

Par suite:

$sing(f(x)) \cdot \min(|f(x)|, \alpha) = -1 \cdot \alpha = -\alpha = f_\alpha(x)$ —(3)

alors d'aprè (1), (2) et (3) on a:

$$f_\alpha(x) = sing(f(x)) \cdot \min(|f(x)|; \alpha)$$

2) 1^er^ méthode Par hypothèse, on sait que f est une fonction mesurable, et comme

la fonction $h(x) = |x|$ mesurable (puisque Continue)

la fonction $g(x) = |f(x)|$ = (= Composée)

= $l(x) = \alpha$ = (= Constante)

= $\min(|f(x)|, \alpha)$ = (Exo 2, inf)

= $f(x)/|f(x)| = \text{sing}(f(x))$ = (quotient)

alors: $\min(|f(x)|, \alpha) \times \text{sing}(f(x))$ est mesurable (Produit)

Par suite: $f_\alpha(x) = \text{sing}(f(x)) \cdot \min(|f(x)|, \alpha)$ est mesurable

$2^{\text{ème}}$ méthode: Posons; $A = f^{-1}(]-\infty, -\alpha[)$

$B = f^{-1}([\alpha, \alpha])$, $C = f^{-1}(]\alpha, +\infty[)$

Remarquons que: * $f_{\alpha/A} = -\alpha$ est mesurable (c^{te})

* $f_{\alpha/B} = f(x)$ est mesurable (f. mesurable)

* $f_{\alpha/C} = \alpha$ est mesurable (c^{te}).

alors, soit $V \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$(f_{\alpha/A})^{-1}(V) \in \mathcal{F}$, $(f_{\alpha/B})^{-1}(V) \in \mathcal{F}$, $(f_{\alpha/C})^{-1}(V) \in \mathcal{F}$

avec $\mathcal{F}$ est la tribu définie sur E.

alors, $f_\alpha^{-1}(V) = E \cap f_\alpha^{-1}(V)$

et $E = A \cup B \cup C$ donc:

$$f_\alpha^{-1}(V) = (A \cup B \cup C) \cap f_\alpha^{-1}(V)$$
$$= (A \cap f_\alpha^{-1}(V)) \cup (B \cap f_\alpha^{-1}(V)) \cup (C \cap f_\alpha^{-1}(V))$$
$$= f_{\alpha/A}^{-1} \cup f_{\alpha/B}^{-1} \cup f_{\alpha/C}^{-1} \in \mathcal{F}.$$

donc f_α^{-1} est mesurable.

Exercice 06 :

1) Remarquons que f n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$, car elle n'est pas continue en $(0,0)$.
Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f_n(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 1/n}$$

On f_n est continue sur $\mathbb{R}^2$, donc $(f_n)_{n\geq 1}$ est suite de fonction mesurable. de plus pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x,y) = f(x,y)$$

et comme la limite simple d'une suite de fonctions mesurables est mesurable, alors

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est mesurable

2) $f_2(x) = \exp(\cos x)$

la composition de deux fonction borélienne (mesurable dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) exp et cos (car les deux fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$) est une fonction borélienne donc $f_2(x) = \exp(\cos x)$ est aussi boréliennes.

· $f_3 = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$.

$\mathbb{Q}$ est un ensemble dénombrable, donc $\mathbb{Q}$ est mesurable dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et par suite

$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est mesurable dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (boréLienne).

<u>Exercice 07:</u>

~~Soient $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$~~

~~Si E un espace fini~~

~~$f_n \longrightarrow f$ p.p $\Longrightarrow$ $f_n \longrightarrow f$ en mesure.~~

Soit $X = [0,1[$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de lebesgue λ. Soit la suite $(f_n)_n$ de fonctions definie par

$f_n = \mathbb{1}_{[1/n,\, 2/n[}$. Montrer que $f_n \longrightarrow 0$ en mesure, mais que $(f_n)_n$ ne Converge pas vers 0 presque partout

<u>Solution:</u> $\forall \alpha > 0$, on a:

$$\{x \in [0,1[: |f_n(x) - 0| \geq \alpha\} \subset [1/n, 2/n[$$

Puisque: Si $x \notin [1/n, 2/n[$, on a: $f_n(x) = 0$ et $|f_n(x) - 0| = 0 < \alpha$, alors

$$x \notin \{x \in [0,1[: |f_n(x) - 0| \geq \alpha\}$$

donc
$\lambda(\{x \in [0,1[: |f_n(x) - 0| \geq \alpha\}) \leq \lambda([1/n, 2/n[) = 1/n$

Par suite

$\lim_n \lambda(\{x \in [0,1[: |f_n(x) - 0| \geq \alpha\}) = 0$.

donc: $f_n \longrightarrow 0$ en mesure.

D'autre part

$\limsup_n f_n = 1 \neq \liminf_n f_n = 0$

alors, $\forall x \in [0,1[$, $\lim_n f_n(x) \neq 0$

D'où $\lambda(\{x \in [0,1[, \lim_n f_n(x) \neq 0\})$
$= \lambda([0,1[) = 1 \neq 0$

alors $(f_n)_n$ ne Converge pas
Vers 0 presque partout

Fin TD 02