Solution du TD1 EDO L3 S5, 2020/2021

Ex ① Résolution des pb suivants et détermination de la nature de la solution (globale ou maximale)

1) $y' = \frac{1}{yt^2}$, $y(1) = 1$.

Ici $f(t,y) = \frac{1}{yt^2}$, et pour que ça soit bien définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, il faut que $yt^2 \neq 0$, c-à-d $y \neq 0$ et $t \neq 0$.

Et comme $t_0 = 1$, qui est la donnée initiale, alors $I =]0, +\infty[$. $\Omega = \mathbb{R}^*$.

$$y' = \frac{1}{yt^2} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1}{yt^2} \Rightarrow y\,dy = \frac{dt}{t^2}$$

$$\Rightarrow \int y\,dy = \int \frac{dt}{t^2} \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{t} + C;\ C\in\mathbb{R}$$

Et comme $y^2 > 0$, alors il faut que $-\frac{1}{t} + C > 0$.

Et donc $y(t) = \pm\sqrt{-\frac{2}{t} + c'}$, $c' = 2C \in \mathbb{R}$.

On a $y(1) = 1 \Rightarrow 1 = \sqrt{-2 + c'} \Rightarrow c' = 3$

Le cas $y(t) = -\sqrt{\frac{-2}{t} + c'}$ est rejeté car $y(1) = 1 > 0$.

Ainsi $y(t) = \sqrt{\frac{-2}{t} + 3}$ où $-\frac{2}{t} + 3 > 0$

$-\frac{2}{t} + 3 > 0 \Rightarrow \frac{-2 + 3t}{t} > 0$ (mais $t > 0$)

Donc $3t - 2 > 0 \Rightarrow t > 2/3$

Finalement $\boxed{y(t) = \sqrt{3 - \frac{2}{t}},\ \forall t \in J =]\frac{2}{3}, +\infty[}$

On remarque que $J \subsetneq I$, alors la solution est maximale.

2. $y'y^2 = t$; $y(0) = 0$.

Ici $I = \mathbb{R} = \Omega$. On a

$$y'y^2 = t \Rightarrow \frac{dy}{dt} y^2 = t \Rightarrow y^2 dy = t\,dt$$

$$\Rightarrow \int y^2 dy = \int t\,dt \Rightarrow \frac{1}{3} y^3 = \frac{1}{2} t^2 + c$$

$$\Rightarrow y(t) = \left(\frac{3}{2} t^2 + c'\right)^{1/3}, \quad c' = 3c \in \mathbb{R}$$

Mais $y(0) = 0 = c' \Rightarrow y(t) = \left(\frac{3}{2} t^2\right)^{1/3}$

$$y(t) = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} t^{2/3}$$

et $\frac{2}{3} < 1$ donc pour que y soit bien définie il faut que $t \neq 0$.

Alors $J =]0, +\infty[$.

$J \subsetneq I \Rightarrow$ la solution est maximale.

Remarque Supposons avoir $y'y^2 = t^3$, $y(0) = 0$

Ça donnera $\begin{cases} \frac{1}{3} y^3 = \frac{1}{4} t^4 + c \\ y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = \left(\frac{3}{4}\right)^{1/3} t^{4/3}$

Et $\frac{4}{3} > 1 \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}$ $t^{4/3}$ est bien définie

D'où $J = \mathbb{R} = I \Rightarrow$ la sol est globale.

Scanné avec CamScanner

Ex ②

L'intervalle J de définition de toute sol max est ouvert ?

Supposons le contraire ; c-à-d on a à la fois 1 sol max et 1 intervalle de déf J non ouvert.

$J =]\alpha, \beta[$ est la forme de l'intervalle ouvert.

Alors J non ouvert, veut dire $J = [\alpha, \beta[$ ou $J =]\alpha, \beta]$ ou $J = [\alpha, \beta]$.

Supposons $J = [\alpha, \beta[$.

Ainsi y est bien définie sur J ; c-à-d sur tout point $t^* \in J$, spécialement $y(\alpha) \in \mathbb{R}$.

Mais $y' = f(t, y)$, veut dire que y est continue sur J, alors y est continue au point $t^* = \alpha$, donc continue à droite et à gauche de α. Ainsi on peut prolonger y à gauche de α et donc sortir de J, ce qui veut dire l'existence d'1 intervalle plus grand que J où la sol y sera définie, ce qui contredit la maximalité de y.

Scanné avec CamScanner

Ex ③

$$\begin{cases} y' = t^2 + e^{-y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$I = \mathbb{R} = \Omega$

$$f(t,y) = t^2 + e^{-y^2}.$$

Le hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz sont-elles vérifiées ?

Continuité + loc Lip de f ?

i) f est continue sur $I \times \Omega$, car c'est la somme de la fct polynômiale $(t,y) \mapsto t^2$ et de la fct exponentielle $(t,y) \mapsto e^{-y^2}$

ii) f est loc Lip ?

Soit $T > 0$ et $r > 0$ où $t_0 = 0$ et $y_0 = 0$.

On prend $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times [y_0 - r, y_0 + r]$

$C = [-T, T] \times [-r, r]$.

On a $\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = 2t$ continue sur $I \times \Omega$

$\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = -2y\, e^{-y^2}$ continue sur $I \times \Omega$

Donc $f \in C^1(I \times \Omega) \Rightarrow f$ loc Lip.

Ainsi de i et ii on peut dire que d'après le théo de Cauchy-Lipschitz on a l'existence d'1 seule sol y telle que

$y : [t_0 - T, t_0 + T] \longrightarrow [y_0 - r, y_0 + r]$

$y : [-T, T] \longrightarrow [-r, r] = [-r, r]$

y sol locale.

Scanné avec CamScanner

Ex 5.

$$(P)\begin{cases} y' = \dfrac{1}{1+ty} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

1. $f(t,y) = \dfrac{1}{1+ty}$ et pour que f soit bien définie il faut que $1+ty \neq 0$. Donc $I\times\Omega = \mathbb{R}\times\mathbb{R} - \{(t,y)\in\mathbb{R}^2 / 1+ty = 0\}$.

En plus $(0,0)\in I\times\Omega$, donc la condition initiale est vérifiée.

On va voir si les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz sont vérifiées :

Continuité + loc Lip de f.

i. f est continue car c'est l'inverse du polynôme non nul $(t,y)\mapsto 1+ty$.

ii. Soit $T>0$, $r>0$ et $C=[t_0-r, t_0+r]\times[y_0-r, y_0+r]$

$C = [-T,T]\times[-r,r]$

$\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,y) = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1}{1+ty}\right) = \dfrac{-y}{(1+ty)^2}$ continue$/_{I\times\Omega}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{1+ty}\right) = \dfrac{-t}{(1+ty)^2}$ continue$/_{I\times\Omega}$

Ainsi $f\in C^1(I\times\Omega) \Rightarrow f$ est loc Lip.

De i + ii on peut dire que d'après le théo de C-L le pb (P) admet 1 seule sol maximale y où $y(0)=0$.

2. y strictement croissante sur J ?

Posons $J =]\alpha, \beta[$ centré en "0"

On a $f\in C^1(J)$ et $y' = \dfrac{1}{1+ty} \neq 0$

Donc $y'>0$ ou $y'<0$

Mais $y'(0) = 1 > 0$

De la régularité de y (puisque $f \in C^1(J')$)
On peut dire que y' est de signe constant
sur J et puisque $y'(0) = 1 > 0$

On aura $y'(t) > 0 \quad \forall t \in J$
Donc y est strictement croissante $/J$.

* y impaire $/J$?

On a $J =]\alpha, \beta[$ centré en 0.
Considérons la fct z définie sur
$]-\beta, -\alpha[$ par $z(t) = -y(-t)$

Et soit $t \in]-\beta, -\alpha[$, on a
$z(t) = -y(-t) \in [-r, r] = [y_0 - r, y_0 + r]$
Car $y(-t) \in [-r, r]$ (Q.1).
Et $z'(t) = (-y(-t))' = y'(-t) = f(-t, y(-t))$

$$= \frac{1}{1+(-t)\times y(-t)} = \frac{1}{1+t\times -y(-t)}$$
$$= \frac{1}{1+t\times z(t)} = f(t, z(t))$$

En plus $z(0) = -y(-0) = 0$.
Alors z est 1 sol de (P), qui n'admet
qu'une seule sol max. Donc $z \equiv y /_J$
Ainsi y est impaire sur $J =]\alpha, \beta[$
$\alpha < 0 < \beta$.

Ex 5

$$\begin{cases} y' = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$I = \Omega = \mathbb{R}$, $f(t,y) = 3y^{2/3}$

f est bien continue sur $I \times \Omega$.

Mais $\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = 0$ continue sur $I \times \Omega$

Par contre $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = 2y^{2/3 - 1} = 2y^{-\frac{1}{3}}$

qui n'est pas continue au pt $(t,0)$ donc $f \notin C^1(I \times \Omega)$.

Alors f n'est pas loc Lip.

Ainsi on ne peut pas appliquer le théo de C-L. Et donc (P) admet plus d'1 solution.