Solutions des exercices.
Equations de la Physique Mathématiques.

Série 1, exercice 3. (propriétées des EDP)
2- Résoudre l'EDP: $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}u(x,y) = y^3x^2 ...(1)$
En posons $v(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}u(x,y)$, la relation (1) peut s'écrire comme suit:
(1) $\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}v(x,y) = y^3x^2$,intégrons par rapport à y on obtient:

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{y} \frac{\partial}{\partial s}v(x,s)ds &= x^2 \int_{y_0}^{y} s^3 ds \\ v(x,y) - v(x,y_0) &= x^2 \left[\frac{1}{4}s^4\right]_{y_0}^{y} \\ v(x,y) &= \frac{1}{4}x^2y^4 + v(x,y_0) - \frac{1}{4}x^2y_0^4 \end{aligned}$$

Posons $f(x) = v(x,y_0) - \frac{1}{4}x^2y_0^4$, on trouve:

$$v(x,y) = \frac{1}{4}x^2y^4 + f(x), \text{ c-à-d: } \frac{\partial}{\partial x}u(x,y) = \frac{1}{4}x^2y^4 + f(x).$$

En intégrant par rapport à x, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial s}u(s,y)ds &= \frac{1}{4}y^4 \int_{x_0}^{x} s^2 ds + \int_{x_0}^{x} f(s)ds \\ u(x,y) - u(x_0,y) &= \frac{1}{4}y^4 \left[\frac{1}{3}s^3\right]_{x_0}^{x} + F(x), \text{ à condition que } f \text{ admet une primitive.} \end{aligned}$$

Par suite

$$u(x,y) = \frac{1}{12}y^4x^3 + F(x) + u(x_0,y) - \frac{1}{12}y^4x_0^3.$$

Posons $G(y) = u(x_0,y) - \frac{1}{12}y^4x_0^3$, la solution de l'EDP (1) est

$$u(x,y) = \frac{1}{12}y^4x^3 + F(x) + G(y).$$

Maintenant on cherche une solution particulière vérifiant:

$$u(x,0) = x^2 \text{ et } u(2,y) = e^y.$$

On a:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= x^2 \Leftrightarrow F(x) + G(0) = x^2 \\ u(x,0) &= x^2 \Leftrightarrow F(x) = x^2 - G(0). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
u(2,y) &= e^y \Leftrightarrow \frac{1}{12}y^4 2^3 + F(2) + G(y) = e^y \\
u(2,y) &= e^y \Leftrightarrow G(y) = e^y - F(2) - \frac{2}{3}y^4.
\end{aligned}$$

On obtient alors:

$$\begin{cases} F(x) = x^2 - G(0) \ \ .... \quad (2) \\ G(y) = e^y - F(2) - \frac{2}{3}y^4 ....(3) \end{cases}$$

De (2) on a: $F(2) = 4 - G(0)$,en substituant dans (3) on trouve:

$$G(y) = e^y - 4 + G(0) - \tfrac{2}{3}y^4.$$

Donc avec ces conditions, la solution particulière est:

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \frac{1}{12}y^4x^3 + x^2 - G(0) + e^y - 4 + G(0) - \frac{2}{3}y^4 \\
&= \frac{1}{12}y^4x^3 + x^2 + e^y - 4 - \frac{2}{3}y^4.
\end{aligned}$$

Série 2, exercice 1. (méthode des caractéristiques)
Résoudre le problème aux limites suivant par la méthode des caractéristiques:

$$\begin{cases} u_x + 3y^{\frac{2}{3}}u_y = 2 \\ u(x,1) = 1 + x \end{cases}$$

L'EDP est linéaire d'ordre 1 non homogène, sous la forme:

$$b(x,y)\nabla u(x,y) + c(x,y)u(x,y) = 2,$$

où $b(x,y) = (1 \quad 3y^{\frac{2}{3}})$, $\nabla u(x,y) = \binom{u_x}{u_y}$ et $c(x,y) = 0$.

Soit s un paramètre positif, $x(s)$ et $y(s)$ sont les courbes paramétrisées telle que: $Z(s) = u(x(s), y(s))$ et $P(s) = \nabla u(xs), y(s))$.

$Z(.)$ et $P(.)$ sont les fonctions caractéristiques.

Dans ce cas le système d'EDO caractéristiques est le suivant:

$$\begin{cases} \dot{x(s)} = 1.....(1) \\ \dot{y(s)} = 3y^{\frac{2}{3}}....(2) \\ \dot{Z(s)} = 2.....(3) \end{cases}$$

De (1) on a:

$$\int_0^s \dot{x(t)}dt = \int_0^s dt$$

Donc

$$x(s) = s + x(0), \text{ les courbes caractéristiques sont des droites.}$$

De (2) on a:

$$\int_0^s y(t)^{\frac{-2}{3}} \dot{y}(t) dt = 3 \int_0^s dt, \text{ ce qui donne}$$

$$\left[\frac{y(t)^{\frac{-2}{3}+1}}{\frac{-2}{3}+1} \right]_0^s = 3y(t)^{\frac{1}{3}} - 3y(0)^{\frac{1}{3}} = 3s$$

Donc

$$y(s) = (s + y(0)^{\frac{1}{3}})^3, \text{ les courbes caractéristiques sont des fonctions puissances.}$$

De (3) on trouve que

$$\dot{Z}(s) = 2, \text{ c-à-d } Z(s) = Z(0) + 2s.$$

D'après les conditions au bord on a

$$u(x(s), 1) = 1 + x(s),$$

Il vient alors que

$$Z(0) = u(x(0), y(0)) = 1 + x(0), \text{ où } y(0) = 1,$$

posons alors $x(0) = x_0$ et $Z(0) = 1 + x_0$.
On fixe un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et on cherche x_0 et s tq

$$\begin{aligned} x(s) &= x \\ y(s) &= y \end{aligned}$$

On a $x_0 = x - s$ et $s = y^{\frac{1}{3}} - y_0^{\frac{1}{3}} = y^{\frac{1}{3}} - 1$ donc $x_0 = x - y^{\frac{1}{3}} + 1$ et $Z(s) = 1 + x - y^{\frac{1}{3}} + 1 + 2y^{\frac{1}{3}} - 2 = x + y^{\frac{1}{3}}$.
D'où la solution générale de L'EDP est

$$Z(s) == x + y^{\frac{1}{3}}.$$

Série 3.

C) Résoudre le problème homogène associé à l'équation de Laplace dans un rectangle, par la méthode de séparation des variables:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{xx} + u_{yy} = 0, \ 0<x<l, \ 0<u<h \ , \ h>0, \ l>0 \\ u(0, \ y) = u(l, \ y) = u(x, \ 0) = 0, \\ u(x, \ h) = x, \ 0 \le x \le l, \ 0 \le y \le h \end{array} \right. \tag{1}$$

Déterminer la solution si $l = \pi$.
Posons $u(x, y) = \psi(x)\varphi(y)$, alors:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \Leftrightarrow \psi^{''}(x)\varphi(y) + \psi(x)\varphi^{''}(y) = 0 \Leftrightarrow \frac{\psi^{''}(x)}{\psi(x)} = -\frac{\varphi^{''}(y)}{\varphi(y)},$$

On cherche deux fonctions ψ et φ non nulles de la variable x et y respectivement, où $u(x, y) = \psi(x)\varphi(y)$, vérifiant $\frac{\psi^{''}(x)}{\psi(x)} = -\frac{\varphi^{''}(y)}{\varphi(y)}$ et comme les variables x et y sont indépendantes cette équation ne peut être que constante. On écrit donc

$$\frac{\psi^{''}(x)}{\psi(x)} = -\frac{\varphi^{''}(y)}{\varphi(y)} = c.$$

Premier cas $c > 0$.
On obtient deux EDO d'ordre 2 homogènes:

$$\begin{aligned} \psi^{''}(x) - c\psi(x) &= 0.............(1) \\ \varphi^{''}(y) + c\varphi(y) &= 0.............(2) \end{aligned}$$

La solution de l'EDO (1) est donnée par:

$$\psi(x) = \alpha ch\sqrt{c}x + \beta sh\sqrt{c}x, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des constantes à déterminer.}$$

D'après les conditions aux bords $u(0, y) = 0 \Rightarrow \psi(0) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ et $u(l, y) = 0 \Rightarrow \psi(l) = 0 \Rightarrow \beta = 0$.
Donc $\psi(x) = 0$ d'où $u(x, y) = 0$ solution nulle, rejetée.
Deuxième cas $c = 0$.

On obtient deux EDO d'ordre 2 homogènes:

$$\begin{aligned} \psi^{''}(x) &= 0.............(1) \\ \varphi^{''}(y) &= 0.............(2) \end{aligned}$$

La solution de l'EDO (1) est donnée par:

$$\varphi(x) = ax + b, \text{ où } a \text{ est une constante à déterminer.}$$

D'après les conditions aux bords $u(0, y) = 0 \Rightarrow \psi(0) = 0 \Rightarrow b = 0$ et $u(l, y) = 0 \Rightarrow \psi(l) = 0 \Rightarrow al = 0 \Rightarrow a = 0$.
c-à-d $\psi(x) = 0$ et par suite $u(x, y) = 0$ solution nulle, rejetée.
Troisième cas $c < 0$.
Dans ce cas posons $c = -\lambda^2 < 0$. ($\lambda \neq 0$)
Il vient alors que

$$\frac{\psi^{''}(x)}{\psi(x)} = -\frac{\varphi^{''}(y)}{\varphi(y)} = -\lambda^2,$$

Alors

$$\begin{aligned}
\psi^{''}(x) + \lambda^2\psi(x) &= 0.............(1)\\
\varphi^{''}(y) - \lambda^2\varphi(y) &= 0.............(2)
\end{aligned}$$

Les deux EDO ont les solutions suivantes:

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= a\cos\lambda x + b\sin\lambda x\\
\varphi(y) &= \alpha ch\lambda y + \beta sh\lambda y
\end{aligned}$$

D'après les conditions aux bords $u(0, y) = 0 \Rightarrow \psi(0) = 0 \Rightarrow a = 0$ et $u(l, y) = 0 \Rightarrow \psi(l) = 0 \Rightarrow b\sin\lambda l = 0 \Rightarrow \lambda l = n\pi$, où $n \in \mathbb{N}^*$, donc $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

La solution de la première EDO dépend de n, de la forme

$$\psi_n(x) = b_n \sin\lambda_n x.$$

On a aussi $u(x, 0) = 0 \Rightarrow \varphi(0) = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \varphi_n(y) = \beta_n sh\lambda_n y$.

On obtient alors une suite de solutions

$$u_n(x, y) = \psi_n(x)\varphi_n(y) = A_n \sin\lambda_n x\ sh\lambda_n y,\ \text{où } A_n = b_n\beta_n.$$

En appliquant le principe de superposition, toute combinaisons linéaires des solutions $u_n(x, y)$ reste aussi une solution pour notre problème, et par passage à la limite, si elle existe quand $n \to \infty$, on obtient

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\lambda_n x\ sh\lambda_n y.$$

On détermine maintenant les paramètres A_n à partir de la condition $u(x, h) = x; 0 < x < l$.

$$\begin{aligned}
u(x,\ h) &= x \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\lambda_n x\ sh\lambda_n h = x\\
&\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\lambda_n x = x,\ o\grave{u} B_n = A_n sh\lambda_n l.
\end{aligned}$$

Donc la solution est la série de Fourier associée à la fonction $f(x) = x$,et B_n sont les coefficients de la série de Fourier et on les déterminepar la relation:

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx,$$

En intégrant par partie on trouve que
$u = x \Rightarrow du = dx$
$v^{'} = \sin\frac{n\pi}{l}x \Rightarrow v = -\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}x$, donc

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{l}(\left[-\frac{xl}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}x\right]_0^l + \frac{l}{n\pi}\int_0^l \cos\frac{n\pi}{l}xdx) \\ &= \frac{2}{l}(-\frac{l^2}{n\pi}\cos n\pi + \frac{l}{n\pi}\left[\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{l}x\right]_0^l) \\ &= \frac{-2l}{n\pi}\left(-1\right)^n. \end{aligned}$$

Donc la solution du problème (1) est donnée par

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2l}{n\pi}\left(-1\right)^n \sin\lambda_n x\ sh\lambda_n y,\ \text{où } 0 < x < l \text{ et } 0 < y < h.$$