Série d'exercices
Espaces vectoriels normés.

Exercice 02 : Soit $E = \mathbb{C}^n$, un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

1) Montrons que l'application $<\cdot/\cdot> : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$

$$(x,y) \longmapsto <x,y> = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

est un produit scalaire :

a) $\forall x \in E$, $<x,x> = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x_i} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \geq 0$.

$<x,x> = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = 0$

$\Longleftrightarrow x_i = 0, \ \forall i = \overline{1,n}$

$\Longleftrightarrow x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.

b) $\forall x, y \in E$, $<x,y> = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$

$= \overline{\sum_{i=1}^{n} \overline{x_i \overline{y_i}}} = \overline{\sum_{i=1}^{n} y_i \overline{x_i}}$

$= \overline{<y,x>}$.

c) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall x, y, z \in E$,

$<\alpha x + \beta y, z> = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i) \cdot \overline{z} = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{z_i} + \beta \sum_{i=1}^{n} y_i \overline{z_i}$

$= \alpha <x,z> + \beta <y,z>$

De a), b), c) on déduit que l'application $<\cdot/\cdot>$ est un produit scalaire et $(E, <\cdot/\cdot>)$ est un espace préhilbertien.

2) Soit $u = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, alors $\|u\|^2 = <u,u> = 2$, $\|v\|^2 = <v,v> = 2$, $<u,v> = -i - i = -2i$ et $\|u+v\|^2 = <u+v, u+v> = 4$, on a : $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ mais $<u,v> = -2i \neq 0$, c'est à dire l'implication suivante $\forall x, y \in E, \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Longrightarrow <x,y> = 0$ n'est pas en général vraie dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Exercice 04 : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x, y \in E$, $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

Montrons que l'application $<.|.> : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$(x,y) \longmapsto <x,y> = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right]$$

est un produit scalaire sur E.

1) $\forall x \in E$, $<x,x> = \frac{1}{4}\left(\|2x\|^2\right) = \|x\|^2 \geq 0$.

$<x,x> = 0 \Leftrightarrow \|x\|^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

2) $\forall x, y \in E$, $<x,y> = \frac{1}{4}\left[\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2\right]$

$= <y,x>$.

3) Montrons d'abord que : $\forall x, y, z \in E$, $<0,z> = 0$

et $<x+y,z> + <x-y,z> = 2<x,z>$.

ensuite on va déduire que $<x+y,z> = <x,z> + <y,z>$

on a $\forall z \in E$, $<0,z> = \frac{1}{4}\left(\|0+z\|^2 - \|-z\|^2\right) = 0$

on a aussi : $<x+y,z> + <x-y,z> = \frac{1}{4}\left[\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 + \right.$

$\left.\|x-y+z\|^2 - \|x-y-z\|^2\right]$

$= \frac{1}{4}\left[\|x+z+y\|^2 + \|x+z-y\|^2\right]$

$- \frac{1}{4}\left[\|x-z+y\|^2 + \|x-z-y\|^2\right]$

par l'idendité du parallélogramme on obtient :

$<x+y,z> + <x-y,z> = \frac{2}{4}\left[\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2\right]$

$= 2<x,z>$ - - - - - - - (*)

on peut déduire de cette égalité que :

$<x+x,z> + <x-x,z> = 2<x,z> \Rightarrow <2x,z> \overset{(**)}{=} 2<x,z>$

De la relation $(*)$ on déduit que : $\forall x,y,z \in E$,

$$<x,z> + <y,z> = <\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2},z> + <\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2},z>$$

$$\overset{De(*)}{=} 2<\frac{x+y}{2},z>$$

$$\overset{De(**)}{=} <x+y,z>.$$

pour montrer que : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x,y \in E$, $<\lambda x,y> = \lambda <x,y>$

on procède par étape :

étape 1 : il est facile de vérifier par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x,y \in E, <nx,y> = n<x,y>.$$

étape 2 : Montrons que $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\forall x,y \in E$, $<px,y> = p<x,y>$

si $p \in \mathbb{N}$, c'est vérifié dans étape 1.

supposons que $p=-n$, $\forall n \in \mathbb{N}$; on a d'une part.

$$<(n-n)x,y> = <0,y> = 0 \quad ----(1)$$

d'autre part : $<(n-n)x,y> = <nx-nx,y>$

$$= n<x,y> + <(-n)x,z> \quad ---(2)$$

De (1) et (2) on obtient : $<(-n)x,y> = -n<x,y>$.

Alors $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\forall x,y \in E$, $<px,y> = p<x,y>$.

étape 3 : $\forall r \in \mathbb{Q}$, $\forall x,y \in E$.

$\forall r \in \mathbb{Q}$, $\exists (p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ Tq $r = \frac{p}{q}$, donc.

$$<rx,y> = <\frac{p}{q}x,y> = p.\frac{q}{q}<\frac{1}{q}x,y>.$$

$$= \frac{p}{q}<x,y>.$$

étape 04: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in E$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(r_n)_n$ de $\mathbb{Q}$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = \lambda$.

on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $< r_n x, y > = r_n < x, y >$, alors.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{4}\left[\|r_n x + y\|^2 - \|r_n x - y\|^2 \right] = r_n < x, y >.$$

par passage à la limite on obtient :

$$\frac{1}{4}\left[\|\lambda x + y\|^2 - \|\lambda x - y\|^2 \right] = \lambda < x, y >.$$

par conséquent : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in E$, $< \lambda x, y > = \lambda < x, y >$.

Exercice 05: soit $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, d'après l'exo 4 pour que l'espace normé E soit un espace préhilbertien, il faut qu'il vérifie l'identité du parallélogramme :

$$\forall x, y \in E, \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

si on prend $x = (1, -1, 0, 0 \cdots, 0)$, $y = (0, 0, 1, 0, 0, \cdots 0)$

alors $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$ et $\|x+y\|_\infty = \|x-y\|_\infty = 1$.

$$\|x+y\|_\infty^2 + \|x-y\|_\infty^2 \neq 2\|x\|_\infty + 2\|y\|_\infty$$

Comme il existe deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$ tq l'identité du parallélogramme n'est pas vérifiée, alors E n'est pas un espace préhilbertien.

Exercice 06 : soit $(E, <\cdot/\cdot>)$ un espace préhilbertien.

$\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ est libre c.à.d.

soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i = 0$, alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$?

on a d'une part : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i = 0$, alors $< \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i, \phi_k > = <0, \phi_k> = 0$

$\forall k \in \{1, \dots, n\}$, d'autre part :

$$< \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i, \phi_k > = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i < \phi_i, \phi_k >, \ \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

$$= \alpha_k \|\phi_k\|^2, \text{ car } < \phi_i, \phi_k > = 0 \ \forall i \neq k$$

donc on obtient : $\alpha_k \|\phi_k\|^2 = 0, \ \forall k \in \{1, \dots, n\}$ et $\phi_k \neq 0$

alors $\alpha_k = 0, \ \forall k \in \{1, \dots, n\}$.

d'où les vecteurs orthogonaux sont linéairement indépendants.

Exercice 07 : soit $(E, <\cdot/\cdot>)$ un espace de Hilbert.

1) Montrons que $A^\perp$ est un sous espace vectoriel de E.

a) on a $0 \in A^\perp$, car $<0, a> = 0, \ \forall a \in A$, donc $A^\perp \neq \phi$

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \ \forall x, y \in A^\perp$, montrons que $\lambda x + \mu y \in A^\perp$

c.à.d $< \lambda x + \mu y, a > = 0, \ \forall a \in A$, on a :

$$\forall a \in A, \ < \lambda x + \mu y, a > = \lambda < x, a > + \mu < y, a >$$

$$= 0 \ (\text{car } x, y \in A^\perp).$$

donc $\lambda x + \mu y \in A^\perp$, alors $A^\perp$ est un s.e.V de E.

b) Montrons maintenant que $A^\perp$ est fermé.

Soit $x \in \overline{A^\perp} \Leftrightarrow \exists (x_n) \subset A^\perp$ Tq $\lim x_n = x$, montrons que $x \in A^\perp$. on a $x_n \in A^\perp$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors

$\langle x_n, a \rangle = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall a \in A$, par passage à la limite on obtient : $\langle x, a \rangle = 0$, $\forall a \in A$, donc $x \in A^\perp$ d'où $A^\perp$ est fermé.

2) Montrons que si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$.

$\forall x \in B^\perp$, $\forall a \in A$ et Comme $A \subset B$, alors $a \in B$, d'où

$\langle x, a \rangle = 0 \Rightarrow x \in A^\perp$, alors $B^\perp \subset A^\perp$.

3) $(A^\perp)^\perp = \overline{A}$, montrons d'abord que $A \subset (A^\perp)^\perp$

$\forall x \in A$, $\forall y \in A^\perp$, alors $\langle y, x \rangle = 0$, d'où $x \in (A^\perp)^\perp$

donc $A \subset (A^\perp)^\perp \Rightarrow \overline{A} \subset (A^\perp)^\perp$ ($(A^\perp)^\perp$ est fermé).

Montrons maintenant que $(A^\perp)^\perp \subset \overline{A}$.

supposons par l'absurde que : $\exists f \in (A^\perp)^\perp$ et $f \notin \overline{A}$

on a $f \in (A^\perp)^\perp \subset E$ et $\overline{A}$ est un s.e.v fermé de E, donc d'après le théorème de projection $\exists! f^* \in \overline{A}$ Tel que :

$\langle f - f^*, v \rangle = 0$, $\forall v \in \overline{A} \Rightarrow f - f^* \in (\overline{A})^\perp \subset A^\perp$

Montrons que $f = f^*$ c.à.d $\|f - f^*\| = 0$.

$$\|f - f^*\|^2 = \langle f - f^*, f - f^* \rangle$$

$$= \langle \underbrace{f - f^*}_{\in A^\perp}, \underbrace{f}_{\in (A^\perp)^\perp} \rangle + \langle \underbrace{f - f^*}_{\in (\overline{A})^\perp}, \underbrace{f^*}_{\in \overline{A}} \rangle$$

$$= \quad 0 \quad + \quad 0$$

donc $\|f-f^*\|^2=0$, d'où $f=f^*$ c'est une contradiction car $f\notin\bar{A}$ et $f^*\in\bar{A}$, d'où $(A^\perp)^\perp\subset\bar{A}$,

par conséquent $(A^\perp)^\perp=\bar{A}$.

Exercice 08 : soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert.

$\forall x,y\in E,\quad |\langle x,y\rangle|=\|x\|\cdot\|y\| \Leftrightarrow x$ et y sont liés.

si y et x sont liés, il est facile de vérifier que $|\langle x,y\rangle|=\|x\|\|y\|$

supposons que $|\langle x,y\rangle|=\|x\|\cdot\|y\|$, $\forall x,y\in E$ et montrons que x et y sont liés c.à.d $\exists\lambda\overset{?}{\in}\mathbb{K}$ tel que $y=\lambda x$.

$y=\lambda x$ veut dire que $y\in[x]$ l'espace engendré par le vecteur $x\neq0$ c'est la droite $\{\lambda x,\ \lambda\in\mathbb{K}\}$

pour $y\in E$, il existe d'après le théorème de projection un unique $y^*\in[x]$ tel que $y^*=\dfrac{\langle y,x\rangle}{\langle x,x\rangle}\cdot x$.

Montrons que $\|y-y^*\|=0$, c.à.d $y=y^*$.

$$\begin{aligned}\|y-y^*\|^2&=\langle y-y^*,y-y^*\rangle\\&=\|y\|^2-\langle\frac{\langle y,x\rangle}{\langle x,x\rangle}x,y\rangle\\&=\|y\|^2-\frac{\langle y,x\rangle}{\|x\|^2}\langle x,y\rangle\\&=\|y\|^2-\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|x\|^2},\ \text{et par l'hypothèse on a}\\&=\|y\|^2-\|y\|^2=0.\end{aligned}$$

il s'ensuit que $y=y^*=\underbrace{\dfrac{\langle y,x\rangle}{\langle x,x\rangle}}_{\lambda}\cdot x$ c.à.d x et y sont liés.

Exercice 09 : Soit $(E, <.,.>)$ un espace de Hilbert.

1) Comme la boule fermé B est convexe fermé, on applique le théorème de projection, alors il existe $x^* \in B$ unique tel que $d(x, B) = \|x - x^*\| = \inf\{\|x-y\|, y \in B\}$.

2) si $x \in B$, alors $x = x^*$, d'après l'unicité de la meilleur approximation.

Montrons que $x^* = \frac{x}{\|x\|}$ si $x \notin B$ c.à.d

$\|x - x^*\| = \|x - \frac{x}{\|x\|}\| = d(x, B)$.

on remarque que $\|x - \frac{x}{\|x\|}\| = \|x\| - 1$.

$\forall y \in B$, $\|x\| - 1 \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$.

c.à.d $\|x\| - 1$ est un minorant de $\{\|x-y\|, y \in B\}$

donc $\|x\| - 1 \leq d(x, B)$ ---- (1)

on a $\frac{x}{\|x\|} = y \in B$ car $\|\frac{x}{\|x\|}\| = 1$.

D'après la définition de la borne inférieure on a :

$$d(x, B) \leq \|x - \frac{x}{\|x\|}\| \quad --- (2)$$

De (1) et (2) on obtient $\|x - \frac{x}{\|x\|}\| = d(x, B)$.

Exercice 10 : $E = \mathbb{R}^3$, $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

1) Les vecteurs V_1, V_2, V_3 sont libres et ne sont pas orthogonaux. En utilisant le procédé de Gram Schmidt.

$$\phi_1 = V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\phi_2 = V_2 - \frac{<V_2, \phi_1>}{<\phi_1, \phi_1>}\phi_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

suite de l'exo 10 :

$$\Phi_3 = V_3 - \frac{\langle V_3, \Phi_1\rangle}{\langle \Phi_1, \Phi_1\rangle}\Phi_1 - \frac{\langle V_3, \Phi_2\rangle}{\langle \Phi_2, \Phi_2\rangle}\Phi_2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

les vecteurs Φ_1, Φ_2, Φ_3 sont orthogonaux.

2) $$P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / \ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} / \ x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} / \ x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

donc le plan p est engendré par les vecteurs $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui ne sont pas orthogonaux, donc on utilise Gram schmidt pour orthogonaliser ces vecteurs.

$$\Phi_1 = V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_2 = V_2 - \frac{\langle V_1, \Phi_1\rangle}{\langle \Phi_1, \Phi_1\rangle}\Phi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc la projection orthogonale u^* de $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sur p est :

$$u^* = \frac{\langle u, \Phi_1\rangle}{\langle \Phi_1, \Phi_1\rangle}\Phi_1 + \frac{\langle u, \Phi_2\rangle}{\langle \Phi_2, \Phi_2\rangle}\Phi_2 .$$

$$= 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{4}{3} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11 :

$\Pi_3([-1,1]) = \text{Vect}\{P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,\ P_2(x)=x^2,\ P_3(x)=x^3\}$

c'est une partie de $C([-1,1])$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\cdot g(t)\,dt.$$

1) Les vecteurs P_0, P_1, P_2, P_3 sont libre mais ne sont pas orthogonaux, par le procédé de Gram schmidt on obtient :

$$\Phi_0(x) = P_0(x) = 1.$$

$$\Phi_1(x) = P_1(x) - \frac{\langle P_1, \Phi_0\rangle}{\langle \Phi_0, \Phi_0\rangle}\Phi_0(x)$$

$$= x - \frac{\int_{-1}^{1} x\,dx}{2}\cdot 1 = x.$$

$$\boxed{\Phi_1(x) = x}$$

$$\Phi_2(x) = P_2(x) - \frac{\langle P_2, \Phi_0\rangle}{\langle \Phi_0, \Phi_0\rangle}\Phi_0(x) - \frac{\langle P_2, \Phi_1\rangle}{\langle \Phi_1, \Phi_1\rangle}\Phi_1(x)$$

$$\boxed{\Phi_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}}$$

$$\Phi_3(x) = P_3(x) - \frac{\langle P_3, \Phi_0\rangle}{\langle \Phi_0, \Phi_0\rangle}\Phi_0(x) - \frac{\langle P_3, \Phi_1\rangle}{\langle \Phi_1, \Phi_1\rangle}\Phi_1(x) - \frac{\langle P_3, \Phi_2\rangle}{\langle \Phi_2, \Phi_2\rangle}\Phi_2(x)$$

$\boxed{\Phi_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x}$, les vecteurs $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ sont orthogonaux

2) La meilleur approximation de $f(x) = x^4$ est :

$$f^*(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{\langle f, \Phi_k\rangle}{\langle \Phi_k, \Phi_k\rangle}\Phi_k(x).$$

$$= \frac{6}{7}x^2 - \frac{3}{35}$$

Exercice 12 : $\forall p, q \in \mathbb{Z}$, $p \neq q$.

$$\langle e_p, e_q \rangle = \int_0^a e_p(x)\cdot\overline{e_q}(x)\,dx$$

$$= \int_0^a e^{2i\pi \frac{x}{a}(p-q)}\,dx$$

$$= \frac{a}{2i\pi(p-q)}\left(e^{2i\pi(p-q)} - 1\right)$$

$$= \frac{a}{2i\pi(p-q)}\left(\cos 2\pi(p-q) + i \sin 2\pi(p-q) - 1\right)$$

$$= 0$$

donc la famille $\left\{e_k(x) = e^{2i\pi k\frac{x}{a}}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est orthogonal.

Exercice 13 :

1) $\forall u, v \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|u+\lambda v\|^2 = \langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle$

$$= \|u\|^2 + 2\lambda\langle u, v\rangle + \lambda^2\|v\|^2$$

$\|u+\lambda v\| \geq \|u\|, \forall \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow \langle u, v\rangle = 0$?

2) si $\|u+\lambda v\| \geq \|u\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\|u+\lambda v\|^2 \geq \|u\|^2$.

si $\|u+\lambda v\| \geq \|u\| \Longrightarrow \|u+\lambda v\|^2 \geq \|u\|^2$

si $\|u+\lambda v\| \geq \|u\|$ $\|u\|^2 + 2\lambda\langle u, v\rangle + \lambda^2\|v\|^2 \geq \|u\|^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

d'où $\|u\|^2 + 2\lambda\langle u, v\rangle \geq 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

par conséquent : $\lambda^2\|v\|^2 + 2\lambda\langle u, v\rangle$

cela implique que le pôlynôme $p(\lambda) = \lambda^2\|v\|^2 + 2\lambda\langle u, v\rangle$

admet une racine double c.à-d $\Delta = 0 \Longrightarrow \langle u, v\rangle = 0$

3) si E est un espace préhilbertien sur $\mathbb{C}$, alors.

$$\|u+\lambda v\|^2 = \|u\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle v, u\rangle) + |\lambda|^2\cdot\|v\|^2$$

Donc $\|u+\lambda v\|^2 \geq \|u\|^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ implique que.

$$|\lambda|^2\|v\|^2 + 2\operatorname{Re}(\lambda\langle v,u\rangle) \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{C} \text{ ----- } (*)$$

on pose $\lambda = \alpha + i\beta$ et $\langle v, u\rangle = x+iy$, $\alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R}$

on a pour $\beta = 0$, $\lambda = \alpha \in \mathbb{R}$,

de $(*)$ on obtient : $\alpha^2\|v\|^2 + 2\alpha x \geq 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

d'après la question (2) on obtient $x = 0$ ----- (1)

pour $\alpha = 0$, on obtient $\lambda = i\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$.

de $(*)$ on obtient : $\beta^2\|v\|^2 - 2\beta y \geq 0$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$.

d'après la question (2) on obtient : $y = 0$ ----- (2)

De (1) et (2) on déduit que $\langle u, v\rangle = x + iy = 0$.

Si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, $\lambda\langle u,v\rangle = (\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y)$.

donc $(\alpha^2+\beta^2)\|v\|^2 + 2(\alpha x - \beta y) \geq 0$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

d'où $(\alpha^2\|v\|^2 + 2\alpha x) + (\beta^2\|v\|^2 - 2\beta y) \geq 0$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \alpha^2\|v\|^2 + 2\alpha x \geq 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}. \\ \beta^2\|v\|^2 - 2\beta y \geq 0, \forall \beta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

implique que $x = 0$ et $y = 0$, donc $\langle u, v\rangle = 0$.