Université de Batna 2
Faculté des Mathématiques et Informatique
Département de mathématiques

$3^{ème}$ année mathématiques
Année 2020-2021
Sidi ali Fatima Zohra[1]

Corrigé type de la série des exercices 1
Optimisation sans contraintes -LMD- S5

Solution de l'exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Etude de la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$?
   Etude sur $\mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$: la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$, car quotient de fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas.
   Etude en $(0,0)$: pour que f soit continue en $(0,0)$ il faut que $\lim\limits_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$. Passons on coordonées polaires : $x = 0 + r\cos(\theta), y = 0 + r\sin(\theta)$
   $$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^2+y^2} \\ &= \lim_{r\longrightarrow 0} r^3\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) \\ &= \lim_{r\longrightarrow 0} r^3\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) \\ &= 0 = f(0,0) \end{aligned}$$
   Par conséquent f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a
   $$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y) \\ \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3x^2y^2(x^2+y^2) - 2x^4y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{2x^3y(x^2+y^2) - 2x^3y^3}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$
   Pour $(x,y) = (0,0)$, on a
   $$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} \partial_x f(0,0) \\ \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim\limits_{h\longrightarrow 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} \\ \lim\limits_{h\longrightarrow 0} \dfrac{f(0,h) - f(0,0)}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
3. f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$?
   On a déjà vérifie la continuité et la dérivabilité de f, il reste d'étudier la continuité des dérivées partielles, on a
   $$\partial_x f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y^2 + 3x^2y^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
   $\partial_x f$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$, pour $(x,y) = (0,0)$, on a
   $$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \partial_x f(x,y) = \lim_{r\longrightarrow 0} \frac{r^6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)(\cos^2(\theta) + 3\sin^2(\theta))}{r^4} = 0 = \partial_x f(0,0)$$

[1] f.sidiali@univ-batna2.dz

Par conséquent $\partial_x f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. On a aussi,

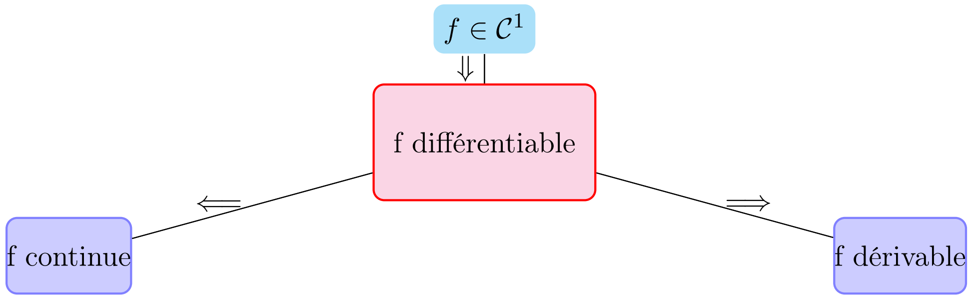
$$\partial_y f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^5 y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$\partial_y f$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$, pour $(x,y) = (0,0)$, on a

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \partial_y f(x,y) = \lim_{r\longrightarrow 0} \frac{2r^6 \cos^5(\theta)\sin(\theta)}{r^4} = 0 = \partial_y f(0,0)$$

donc $\partial_y f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Par conséquent la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

4. On a la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
   En résumé, soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ et $p > 1$, on a le schéma suivant :



Solution de l'exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$, de plus

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^2} \\ &= \lim_{r\longrightarrow 0} r^2 \sin^4(\theta) = 0 = f(0,0) \end{aligned}$$

   Par conséquent f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Calculer $\nabla f(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$; calculer ensuite $\nabla f(0,0)$.
3. Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y) \\ \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{4y^3(x^2+y^2) - 2y^5}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

   Pour $(x,y) = (0,0)$, on a

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} \partial_x f(0,0) \\ \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim\limits_{h\longrightarrow 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} \\ \lim\limits_{h\longrightarrow 0} \dfrac{f(0,h) - f(0,0)}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?
On remarque que f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2\backslash(0,0))$, alors elle est différentiable sur $\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$, il reste d'étudier la différentiabilité au point $(0,0)$.
Rappel. Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie ouvert D de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0,y_0)\in D$ un point lequel f est dérivable. f est différentiable en (x_0,y_0) si et seulement si :
$$\lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-h\partial_x f(x_0,y_0)-k\partial_y f(x_0,y_0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0.$$
Etude en $(0,0)$:
$$\begin{aligned}\lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-h\partial_x f(0,0)-k\partial_y f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \frac{k^4}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}\\ &= \lim_{r\longrightarrow 0}\frac{(r\sin(\theta))^4}{r^3}=0.\end{aligned}$$
Par conséquent f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
5. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$?
Il reste d'étudier la continuité des dérivées partielles au point (0,0), on a
$$\left|\frac{-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}\right| = \left|\frac{2r^5\cos(\theta)\sin^4(\theta)}{r^4}\right| \leq 2r \xrightarrow[r\longrightarrow 0]{} 0,$$
et
$$\left|\frac{4y^3x^2+2y^5}{(x^2+y^2)^2}\right| = \left|\frac{4r^5\cos^2(\theta)\sin^3(\theta)+2r^5\sin^5(\theta)}{r^4}\right| \xrightarrow[r\longrightarrow 0]{} 0,$$
alors
$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \partial_x f(x,y)=0=\partial_x f(0,0),$$
$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \partial_y f(x,y)=0=\partial_y f(0,0)$$
Par conséquent $\partial_x f$ et $\partial_y f$ sont continues au point (0,0), alors la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

Solution de l'exercice 3

Soit la fonction de deux variables
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4y^2x^3-y^5-2x^7}{3x^4+2y^4} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$
Soit (v_1,v_2) un vecteur unitaire du plan alors $(v_1,v_2)\neq(0,0)$, la dérivée de f en (x_0,y_0) selon la direction $v=(v_1,v_2)$ est
$$\partial_v f(x_0,y_0)=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(x_0+v_1h,y_0+v_2h)-f(x_0,y_0)}{h}$$
alors
$$\begin{aligned}\partial_v f(0,0)=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(v_1h,v_2h)-f(0,0)}{h} &= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{4(v_2h)^2(v_1h)^3-(v_2h)^5-2(v_1h)^7}{(3(v_1h)^4+2(v_2h)^4)h}\\ &= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{4v_2^2v_1^3-v_2^5-2v_1^7h^2}{3v_1+2v_2^4}=\frac{4v_2^2v_1^3-v_2^5}{3v_1+2v_2^4}.\end{aligned}$$

On conclut que la dérivée directionnelle $\partial_v f(0,0)$ existe et égale $\partial_v f(0,0) = \dfrac{4v_2^2 v_1^3 - v_2^5}{3v_1 + 2v_2^4}$.

Solution de l'exercice 4

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = e^{2x+y}$, soit $a = (1,2)$, $v = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

— On a $\|v\|_2^2 = \left(\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right)^2 = 1$, alors $\|v\|_2 = 1$, donc v est un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^2$.

— On a la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, d'ou la dérivé de f en (x_0, y_0) selon la direction $v = (v_1, v_2)$ est

$$\partial_v f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0)^\top v = \partial_x f(x_0, y_0) v_1 + \partial_y f(x_0, y_0) v_2.$$

On calcule le gradient de f,

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y) \\ \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2x+y} \\ e^{2x+y} \end{pmatrix}$$

alors,

$$\nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} 2e^4 \\ e^4 \end{pmatrix}$$

donc

$$\partial_v f(1,2) = \nabla f(1,2)^\top v = 2e^4 v_1 + e^4 v_2 = 2e^4 \frac{1}{\sqrt{2}} + e^4 \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3e^4}{\sqrt{2}}.$$

Solution de l'exercice 5

Rappel (Développement limité à l'ordre 2 dans $\mathbb{R}^p$) Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2(D)$. Alors au voisinage de $x_0 \in D$ on a

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)^T \nabla f(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T Hess_f(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_2\|^2).$$

1. $f(x,y) = \sin x . \sin y$, f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, au voisinage $(x_0, y_0) = (0,0)$, on a

$$f(x,y) = f(0,0) + (x,y)\nabla f(0,0) + \frac{1}{2}(x,y) Hess_f(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On a $f(0,0) = 0$.
On calcule le gradient de f,

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos x . \sin y \\ \sin x . \cos y \end{pmatrix}$$

alors,

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On calcule la matrice Hessienne de f,

$$Hess_f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(x,y) & \partial_{xy} f(x,y) \\ \partial_{yx} f(x,y) & \partial_{yy} f(x,y) \end{pmatrix}$$

alors,

$$Hess_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x \sin y & \cos x \cos y \\ \cos x \cos y & -\sin x \sin y \end{pmatrix}$$

d'ou

$$Hess_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve finalement

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = xy.$$

2. $f(x,y) = 1 + x + y + x^2 - xy + y^2$, f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, alors au voisinage $(x_0, y_0) = (0,0)$ on a :

$$f(x,y) = f(0,0) + (x,y)\nabla f(0,0) + \frac{1}{2}(x,y)Hess_f(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On a $f(0,0) = 1$.
On calcule le gradient de f,

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 + 2x - y \\ 1 - x + 2y \end{pmatrix}$$

alors,

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On calcule la matrice Hessienne de f,

$$Hess_f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(x,y) & \partial_{xy} f(x,y) \\ \partial_{yx} f(x,y) & \partial_{yy} f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

alors,

$$Hess_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On trouve finalement

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 1 + (x,y)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= 1 + x + y + \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} 2x - y \\ -x + 2y \end{pmatrix} \\ &= 1 + x + y + \frac{1}{2}(2x^2 - xy - xy + 2y^2) \\ &= 1 + x + y + x^2 - xy + y^2 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 6

1.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \langle c, x \rangle + b \qquad\qquad c, x \in \mathbb{R}^n \text{ et } b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On prend $c = (c_1, ..., c_n)$, $x = (x_1, ...x_n)$, alors $f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + b$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(x) \\ . \\ . \\ \partial_{x_n} f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ . \\ . \\ c_n \end{pmatrix} = c, \text{ et } \nabla^2 f(x) = 0.$$

2.

$$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$x \longmapsto g(x) = Lx + b \qquad L \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \text{ et } b \in \mathbb{R}^m.$$

On prend $L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & ... & L_{1n} \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ L_{m1} & L_{m2} & ... & L_{mn} \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$ alors

$$\begin{aligned} g(x) &= \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & ... & L_{1n} \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ L_{m1} & L_{m2} & ... & L_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} L_{11}x_1 + L_{12}x_2 + ... + L_{1n}x_n + b_1 \\ . \\ . \\ L_{m1}x_1 + L_{m2}x_2 + ... + L_{mn}x_n + b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ . \\ . \\ g_m(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

alors

$$Jg(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} g_1(x) & \partial_{x_2} g_1(x) & ... & \partial_{x_n} g_1(x) \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ \partial_{x_1} g_m(x) & \partial_{x_2} g_m(x) & ... & \partial_{x_n} g_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & ... & L_{1n} \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ L_{m1} & L_{m2} & ... & L_{mn} \end{pmatrix} = L$$

On obtient

$$Jg(x) = L$$

3.

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c \qquad A \in M_n(\mathbb{R}),\ b, x \in \mathbb{R}^n \text{ et } c \in \mathbb{R}.$$

On va calculer $\nabla f(x)$,
On a la fonction f ($f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$) est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, d'aprés le développement de Taylor d'ordre 1, on a :

$$f(x+h) = f(x) + h^T \nabla f(x) + o(\|h\|), \tag{1}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \frac{1}{2}\langle A(x+h), (x+h)\rangle + \langle b, (x+h)\rangle + c \\ &= \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \frac{1}{2}\langle Ax, h\rangle + \frac{1}{2}\langle Ah, x\rangle + \frac{1}{2}\langle Ah, h\rangle + \langle b, x\rangle + \langle b, h\rangle + c \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c}_{f(x)} + \frac{1}{2}\langle Ax, h\rangle + \frac{1}{2}\langle A^T x, h\rangle + \langle b, h\rangle + \frac{1}{2}\underbrace{\langle Ah, h\rangle}_{o(\|h\|)} \end{aligned}$$

Et comme $|\langle Ah, h\rangle| \leq \|A\|_2 \|h\|^2$, on a

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + \frac{1}{2}\langle (A + A^T)x + b, h\rangle + o(\|h\|) \\ &= f(x) + h^T(\frac{1}{2}(A + A^T)x + b) + o(\|h\|) \end{aligned} \tag{2}$$

D'aprés (1) et (2), on obtient $\nabla f(x) = \frac{1}{2}(A + A^T)x + b$, si A est symétrique $\nabla f(x) = Ax + b$.
On calcule la Hessienne de f, d'aprés (2), on a

$$\begin{aligned}
\nabla f(x+h) &= \frac{1}{2}A(x+h) + \frac{1}{2}A^T(x+h) + b \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)x + b}_{\nabla f(x)} + \frac{1}{2}(A + A^T)h \\
&= \nabla f(x) + \frac{1}{2}(A + A^T)h.
\end{aligned}$$

et donc $Hess(f)(x) = \nabla^2 f(x) = \frac{1}{2}(A + A^T)$. On en déduit que si A est symétrique, $Hessf(x) = A$.

Université de Batna 2
Faculté des Mathématiques et Informatique
Département de mathématiques

$3^{ème}$ année mathématiques
Année 2020-2021
Sidi ali Fatima Zohra[1]

Corrigé type de la série des exercices 2
Optimisation sans contraintes -LMD- S5

Solution de l'exercice 1

1. $f(x,y) = (x-1)^2 + 2y^2$.

   on calcule le gradient de f

   $$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y) \\ \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 4y \end{pmatrix}$$

   On cherche les points critiques comme solutions du système

   $$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = 0 \\ \partial_y f(x,y) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2(x-1) = 0 \\ 4y = 0 \end{cases}$$

   Ce système admet unique solution est $(x,y) = (1,0)$, alors on a un seul point critique $M = (1,0)$.

   On calcule la matrice Hessienne de f

   $$Hess_f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(x,y) & \partial_{xy} f(x,y) \\ \partial_{yx} f(x,y) & \partial_{yy} f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   On cherche la nature de M,

   $$Hess_f(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   On a $\det(Hess_f(1,0)) = 8 > 0$ et $\partial_{xx} f(1,0) = 2 > 0$, donc la matrice $Hess_f(1,0)$ est définie positive. Par conséquent, le point M est un minimum local de f.

2. $f(x,y) = 3x^3 - 6xy + 3y^2$.

   on calcule le gradient de f

   $$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 9x^2 - 6y \\ -6x + 6y \end{pmatrix}$$

   On cherche les points critiques comme solutions du système

   $$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = 0 \\ \partial_y f(x,y) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 9x^2 - 6y = 0 \\ -6x + 6y = 0 \end{cases}$$

   ce système admet deux solutions sont $(x,y) = (0,0)$ et $(x,y) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, alors f admet deux points critiques $M_1 = (0,0)$ et $M_2 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

[1]f.sidiali@univ-batna2.dz

<u>On calcule la matrice Hessienne de f</u>

$$Hess_f(x,y) = \begin{pmatrix} 18x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

On cherche la nature de M_1,

$$Hess_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

On a $\det(Hess_f(0,0)) = -36 < 0$, donc la matrice $Hess_f(0,0)$ est indéfinie.
Par conséquent, le point M_1 est un point selle de f.

On cherche la nature de M_2,

$$Hess_f\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

On a $\det(Hess_f\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)) = 36 > 0$ et $\partial_{xx}\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) = 2 > 0$, donc la matrice $Hess_f\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ est définie positive .
Par conséquent, le point M_2 est un minimum local de f.

3. $f(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$.

<u>on calcule le gradient de f</u>

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 2x) \\ e^{x-y}(-x^2 + 2y^2 - 4y) \end{pmatrix}$$

On cherche les points critiques de f,

$$\begin{cases} e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 2x) = 0 \\ e^{x-y}(-x^2 + 2y^2 - 4y) = 0 \end{cases}$$

ce dernier admet deux solutions sont $(x,y) = (0,0)$ et $(x,y) = (-4,-2)$, alors f admet deux points critiques $M_1 = (0,0)$ et $M_2 = (-4,-2)$.

<u>On calcule la matrice Hessienne de f</u>

$$Hess_f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 4x + 2) & e^{x-y}(-x^2 + 2y^2 - 2x - 4y) \\ e^{x-y}(-x^2 + 2y^2 - 2x - 4y) & e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 8y - 4) \end{pmatrix}$$

On cherche la nature de M_1,

$$Hess_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

On a $\det(Hess_f(0,0)) = -8 < 0$, donc la matrice $Hess_f(0,0)$ est indéfinie.
Par conséquent, le point M_1 est un point selle de f.

On cherche la nature de M_2,

$$Hess_f\,(-4,-2) = \begin{pmatrix} -6e^{-2} & 8e^{-2} \\ 8e^{-2} & -12e^{-2} \end{pmatrix}$$

On a $\det(Hess_f\,(-4,-2)) = 8e^{-4} > 0$ et $\partial_{xx}f(-4,-2) = -6e^{-2} < 0$, donc la matrice $Hess_f\,(-4,-2)$ est définie négative. Par conséquent, le point M_2 est un maximum local de f.

4. $f(x,y) = x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$.

   On calcule le gradient de f

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + y^2 - 2xy \\ 2xy - x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}$$

   On cherche les points critiques de f,

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 - 2xy = 0 \\ 2xy - x^2 - 3y^2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x^2 + (x-y)^2 = 0 \\ -2y^2 - (x-y)^2 = 0 \end{cases}$$

   La seul point critique de f est $M = (0,0)$.

   On calcule la matrice Hessienne de f

$$Hess_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x - 2y & 2y - 2x \\ 2y - 2x & 2x - 6y \end{pmatrix}$$

   On cherche la nature de M,

$$Hess_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   On a $\det(Hess_f\,(0,0)) = 0$, alors on peut rien déduire sur la nature de M.
   D'autre part, on a au voisinage de $(0,0)$,
   $f(2x,x) = 5x^3$, alors $f(2x,x) \geq 0 = f(0,0)$ pour $x > 0$, et $f(2x,x) \leq 0 = f(0,0)$ pour $x < 0$.
   Par conséquent, le point M_1 est un point selle de f.

Solution de l'exercice 2

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 2xy + 24.$$

1. f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ car f est une fonction polynômiale définie sur $\mathbb{R}^2$.
2. (a) **On calcule le gradient de f**

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x + 2y + 12 \\ 2x + 2y + 4 \end{pmatrix}$$

   On cherche l'unique point critique (a,b) de f,

$$\begin{cases} 4x + 2y + 12 = 0 \\ 2x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

   Ce système admet une seule solution $(x,y) = (-4,2)$, alors f admet un seul point critique $(a,b) = (-4,2)$.

   (b) **On calcule la matrice Hessienne de f**

$$Hess_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   alors,

$$Hess_f(a,b) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   (c) On a $\det(Hess_f(-4,2)) = 4 > 0$ et $\partial_{xx} f(-4,2) = 4 > 0$, donc la matrice $Hess_f(a,b)$ est définie positive.
   En déduire que f admet un minimum local m au point $(a,b) = (-4,2)$, avec $m = f(-4,2) = 4$.

3. (a) On a

$$2(x+\frac{y}{2}+3)^2 = 2\left(x+\frac{y}{2}\right)^2 + 12\left(x+\frac{y}{2}\right) + 18$$
$$= 2x^2 + 2xy + \frac{y^2}{2} + 12x + 6y + 18,$$

on trouve que

$$2x^2 + 2xy + 12x = 2(x+\frac{y}{2}+3)^2 - (\frac{y^2}{2} + 6y + 18). \tag{1}$$

(b) On a aussi

$$\frac{1}{2}(y-2)^2 = \frac{y^2}{2} - 2y + 2,$$

on trouve que

$$\frac{y^2}{2} - 2y + 6 = \frac{1}{2}(y-2)^2 + 4. \tag{2}$$

(c) On insert l'égalité (1) dans l'expression de f, on obtient

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 2xy + 24 \\ &= 2(x+\frac{y}{2}+3)^2 - (\frac{y^2}{2} + 6y + 18) + y^2 + 4y + 24 \\ &= 2(x+\frac{y}{2}+3)^2 + \frac{y^2}{2} - 2y + 6 \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité (2) dans l'égalité ci-dessus de f, on trouve

$$f(x,y) = 2(x+\frac{y}{2}+3)^2 + \frac{1}{2}(y-2)^2 + 4,$$

ceci implique que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) \geq 4.$$

alors,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) \geq f(-4,2),$$

On conclut que, le minimum déjà trouver $m = 4$, dans la question (2)(c) est un minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Solution de l'exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = xe^{x(y^2+1)}.$$

(1) La fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ car elle est la composition de fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

(2) (a) **On calcule le gradient de f**

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} (1+x(y^2+1))e^{x(y^2+1)} \\ 2x^2ye^{x(y^2+1)} \end{pmatrix}$$

(b) On va montrer que le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum local est $A = (-1,0)$.
on a

$$\begin{cases} (1+x(y^2+1))e^{x(y^2+1)} = 0 \\ 2x^2ye^{x(y^2+1)} = 0 \end{cases}$$

Ce système admet une seule solution $(x,y) = (-1,0)$, alors f admet un seul point critique $A = (-1,0)$.

(3) (a) **On calcule la matrice Hessienne de f**

$$Hess_f(x,y) = \begin{pmatrix} (2+x(y^2+1))(y^2+1)e^{x(y^2+1)} & (2+x(y^2+1))2xye^{x(y^2+1)} \\ (2+x(y^2+1))2xye^{x(y^2+1)} & (1+2xy^2)2x^2e^{x(y^2+1)} \end{pmatrix}$$

(b) On a

$$Hess_f(-1,0) = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix}$$

$\det(Hess_f(-1,0)) = 2e^{-2} > 0$ et $\partial_{xx}f(-1,0) = e^{-1} > 0$, donc la matrice $Hess_f(-1,0)$ est définie positive.
En déduire que f admet un minimum local m au point A, avec $m = f(-1,0) = -e^{-1}$.

(4) (a) Pour $x \geq 0$, on a $y^2+1 \geq 1$ alors $x(y^2+1) \geq x$, donc $e^{x(y^2+1)} \geq e^x$, on trouve $xe^{x(y^2+1)} \geq xe^x$.

Pour $x \leq 0$, on a $y^2+1 \geq 1$ alors $x(y^2+1) \leq x$, donc $e^{x(y^2+1)} \leq e^x$, on obtient $xe^{x(y^2+1)} \geq xe^x$.

Par conséquent, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \geq xe^x$.

(b) On va étudier les variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$g'(x) = (x+1)e^x.$$

Le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$,

x		-1	
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$

On conclut que,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \geq -e^{-1}$$

Par conséquent

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \geq -e^{-1} = f(-1,0),$$

alors le minimum déjà trouver dans la question (2)(b) est un minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Solution de l'exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy.$$

(a) **On calcule le gradient de f**

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 3y \\ 3y^2 + 3x \end{pmatrix}$$

On calcule la matrice Hessienne de f

$$Hess_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{pmatrix}.$$

(b) On note $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$ alors

$$\begin{aligned} f^{'}(u(x), v(x)) &= u'(x)\partial_x f(u(x), v(x)) + v^{'}(x)\partial_y f(u(x), v(x)) \\ &= \partial_x f(x, e^x) + e^x \partial_y f(x, e^x) \\ &= 3x^2 + 3e^x + e^x(3e^{2x} + 3x) \end{aligned}$$

(c) L'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x,y)$ au point $(1, 1.5)$, est

$$z = f(1, 1.5) + (x - 1, y - 1.5)\nabla f(1, 1.5).$$

(d) On cherche les points critiques comme solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x f(x,y) = 0 \\ \partial_y f(x,y) = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x^2 + 3y = 0 \\ 3y^2 + 3x = 0 \end{array} \right.$$

Ce système admet deux solutions sont $(0,0)$ et $(-1,-1)$, f admet deux points critiques $M_1 = (0,0)$ et $M_2 = (-1,-1)$.

(e) **On cherche la nature de M_1,**

$$Hess_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $\det(Hess_f(0,0)) = -9 < 0$, donc la matrice $Hess_f(0,0)$ est indéfinie. Par conséquent, le point M_1 est un point selle de f.

On cherche la nature de M_2,

$$Hess_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

On a $\det(Hess_f(-1,-1)) = 27 > 0$ et et $\partial_{xx} f(-1,-1) = -6 < 0$, donc la matrice $Hess_f(-1,-1)$ est définie négative.
Par conséquent, le point M_2 est un maximum local de f.

(f) On a $f(x,x) = 2x^3 + 3x^2$, on voit que

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x,x) = +\infty,$$

donc f n'a pas de maximum global, et

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x,x) = -\infty,$$

alors f n'a pas de minimum global.

Solution de l'exercice 5

On va étudier la convexité de l'ensemble suivant :

1. A=$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \ x^2+y^2 \leq 1\}$.

   Soit $X_1 \in A$, alors $X_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_1^2 + y_1^2 \leq 1$
   Soit $X_2 \in A$, alors $X_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_2^2 + y_2^2 \leq 1$.
   D'autre part, $\forall \lambda \in [0,1]$, on a $\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 = (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)$,
   alors $\forall X_1, X_2 \in A$, $\forall \lambda \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)^2 + (\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)^2 &= \lambda^2(x_1^2+y_1^2) + (1-\lambda)^2(x_2^2+y_2^2) + 2\lambda(1-\lambda)(x_1x_2+y_1y_2) \\ &\leq \lambda^2 + (1-\lambda)^2 + 2\lambda(1-\lambda)(\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2) + \frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2)) \\ &\leq \lambda^2 + (1-\lambda)^2 + 2\lambda(1-\lambda)(\frac{1}{2}(x_1^2+y_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2+y_2^2)) \\ &\leq \lambda^2 + (1-\lambda)^2 + 2\lambda(1-\lambda)(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}) = (\lambda + (1-\lambda))^2 = 1\end{aligned}$$

   On conclut que

$$\forall X_1, X_2 \in A, \, \forall \lambda \in [0,1], \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 \in A$$

   Par conséquent, A est un ensemble convexe.

2. B=$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \ \frac{1}{2}(y-x^2) \geq 0\}$.
   Soit $X_1 \in B$, alors $X_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\frac{1}{2}(y_1 - x_1^2) \geq 0$
   Soit $X_2 \in B$, alors $X_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\frac{1}{2}(y_2 - x_2^2) \geq 0$.
   D'autre part, $\forall \lambda \in [0,1]$, on a $\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 = (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)$,
   alors $\forall X_1, X_2 \in B$, $\forall \lambda \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}((\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) - (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)^2) &= \frac{1}{2}(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) - \frac{1}{2}(\lambda x_1)^2 - \frac{1}{2}((1-\lambda)x_2)^2 - \lambda(1-\lambda)x_1x_2 \\ &\geq \frac{1}{2}(\lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2) - \frac{1}{2}(\lambda x_1)^2 - \frac{1}{2}((1-\lambda)x_2)^2 - \lambda(1-\lambda)x_1x_2 \\ &= \frac{1}{2}\lambda(1-\lambda)x_1^2 + \frac{1}{2}\lambda(1-\lambda)x_2^2 - \lambda(1-\lambda)x_1x_2 \\ &= \frac{1}{2}\lambda(1-\lambda)(x_1-x_2)^2 \geq 0\end{aligned}$$

   On conclut que

$$\forall X_1, X_2 \in B, \, \forall \lambda \in [0,1], \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 \in B$$

   Par conséquent, B est un ensemble convexe.