Dept : Mathematiques	**Solutions Exercices**	Mr : S.ADOUI
Classes : 2^{eme} Licence		2020-2021

Notation :

► On note par $\mathbb{R}_2[x]$ a l'ensemble des polynmes de degre ≤ 2.

Exercice 1 :

1. Soit $P(x) = a.x^2 + b.x + c \in \mathbb{R}_2[x]$:.
   On a $\begin{cases} P(0) = 1 \\ P(1) = 2 \\ P(2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 1 \\ a+b+c = 2 \\ 4a+2b+c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = \frac{5}{2} \\ c = 1 \end{cases}$
   Donc : $P(x) = -\frac{3}{2}.x^2 + \frac{5}{2}.x + 1$.
2. En utilisant la mthode de Lagrange :
   $P(x) = \sum L_i(x).P(x_i) = L_0(x).P(0) + L_1(x).P(1) + L_2(x).P(2)$;

   $\bullet L_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \times \frac{x-x_2}{x_0-x_2} = \frac{x-1}{-1} \times \frac{x-2}{-2} = \frac{1}{2}.(x^2 - 3x + 2)$.

   $\bullet L_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \times \frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{x}{1} \times \frac{x-2}{-1} = -x^2 + 2x$.

   $\bullet L_2(x) = \frac{x-x_0}{x_2-x_0} \times \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{x}{2} \times \frac{x-1}{1} = \frac{1}{2}.(x^2 - x)$.

   D'ou : $P(x) = -\frac{3}{2}.x^2 + \frac{5}{2}.x + 1$.
3. Comparer le temps de calcul :..........

Exercice 2 :

Soit $f(x) = x + \sqrt{x+1}$ dfinie sur l'intervalle $[-1, 1]$.

1. En utilisant la mthode de Lagrange , calculer P(x) l'interpolant de f aux points : $x_0 = -1, x_1 = 0$:

   $P(x) = \sum L_i(x).f(x_i) = L_0(x).f(x_0) + L_1(x).f(x_1)$;

   $\bullet L_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} = -x$ $\quad\bullet L_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = x + 1$

   D'ou : $P(x) = 2x + 1$.
2. En utilisant la mthode de Newton :
   $P(x) = \sum N_i(x).D_i = N_0(x).D_0 + N_1(x).D_1$;
   ▷ $N_0(x)$ *et* $N_1(x)$: sont les polynomes de bases de Newton d ordre 1 et 2 avec :
   $N_0(x) = 1$ *et* $N_1(x) = x - x_0 = x + 1$.
   ▷ D_0 *et* D_1 sont les differences divisees d'ordre 1 et 2.
   $D_0 = f(x_0) = f(-1) = -1$ *et* $D_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 2$.

   D'ou : $P(x) = 2x + 1$.
3. Comparer le temps de calcul :..........
4. Avec un point supplmentaire $x_2 = 1$:
   En utilisant la methode de Newton, calculer $P_2(x) \in \mathbb{R}_2[x]$:
   $P_2(x) = \sum N_i(x).D_i = N_0(x).D_0 + N_1(x).D_1 + N_2(x).D_2$;

   $\bullet N_0(x) = 1$ $\quad\bullet N_1(x) = x - x_0 = x + 1$ $\quad\bullet N_2(x) = (x - x_0).(x - x_1) = (x+1).x = x^2 + x$.

$\bullet D_0 = f(x_0) = f(-1) = -1$ $\quad \bullet D_1 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = 2$ $\quad \bullet D_2 = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$ avec :

$f[x_1,x_2] = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2-1} = \sqrt{2}$ *et* $f[x_0,x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = D_1 = 2 \Rightarrow D_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D'ou : $P_2(x) = -1+2x+2+\frac{\sqrt{2}}{2}x^2+\frac{\sqrt{2}}{2}x = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2+\frac{(\sqrt{2}+4)}{2}x+1.$

Conclusion :

Dans la methode de Newton si on ajoute un point suplementaire il suffie de calculer la nouvelle difference divisee et le nouveau polynome de base ; par contre dans la methode de Lagrange il faut refaire toute les calcules pour obtenir les polynomes de base pour trouver l'interpolant.

Teoreme :

Si $f \in C^n([a,b]); (n+1)$ fois drivables sur $]a$,b[. Alors :

$$\forall x \in [a,b], \quad \exists \xi(x) \in [a,b] \setminus \quad E(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

Exercice 3 :

1. Calcul de lerreur thorique en interpolant la fonction $f(x) = x^n$, definie sur l intervalle [0, 1] :
   Pour $f(x) = x^n$ on a : $f'(x) = n.x^{n-1}, \quad f''(x) = n(n-1)x^{n-2} \quad \cdots f^{(n)}(x) = n! \Rightarrow f^{(n+1)}(x) = 0.$
   Donc $E_t(x) = 0.$

2. Młme question pour les fonctions :
   $g(x) = x^k$ avec $1 \leq k \leq n$ et $h(x) = x^{n+1}$.
   • Pour $g(x) = x^k$ avec $1 \leq k \leq n$;
   on a : $g'(x) = k.x^{k-1}, \quad g''(x) = k(k-1)x^{k-2} \quad \cdots g^{(k)}(x) = k! \Rightarrow$
   $g^{(k+1)}(x) = g^{(k+2)}(x) = \cdots = g^{(n)}(x) = g^{(n+1)}(x) = 0.$
   Donc $E_t(x) = 0.$
   • Pour $h(x) = x^{n+1}$; on a :
   $h'(x) = (n+1).x^n, \quad h''(x) = (n+1).nx^{n-1} \quad \cdots h^{(n)}(x) = (n+1)!.x \Rightarrow h^{(n+1)}(x) = (n+1)!.$
   Donc $E_t(x) = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i) = \prod_{i=0}^{n}(x-\frac{i}{n}).$

Conclusion :

Soit $f \in \mathbb{R}_n[x]$ et soit P_n l' interpolant de f aux $(n+1)$ points distincts $(x_i)_{i=0}^{i=n}$. Alors :
P_n coincide avec $f \quad (P_n \equiv f)$.

Exercice 4 :

1. Calcul de l interpolant de la fonction $f(x)$, definie sur l intervalle [-2, 4] :
   ▷ Si on choisit la methode de Newton avec quatre points :

   $P_3(x) = \sum N_i(x).D_i = N_0(x).D_0 + N_1(x).D_1 + N_2(x).D_2 + N_3(x).D_3$;
   les polynomes de bases de Newton sont :
   $\bullet N_0(x) = 1 \quad \bullet N_1(x) = x - x_0 = x+2 \quad \bullet N_2(x) = (x-x_0).(x-x_1) = (x+2).(x+1) = x^2+3x+2$
   $\bullet N_3(x) = N_3(x).(x-x_2) = (x+2).(x+1) = (x^2+3x+2).(x-2) = x^3+x^2-4x-4.$

   les differences divisees sont :

$\bullet D_0 = f(x_0) = -14 \quad \bullet D_1 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{45}{4} \quad \bullet D_2 = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$ avec :

$$f[x_1,x_2] = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{-7}{4} \quad et \quad f[x_0,x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = D_1 = \frac{45}{4} \Rightarrow D_2 = \frac{-13}{4}.$$

$\bullet D_3 = \frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$ avec :

$$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}; f[x_2,x_3] = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = \frac{-21}{2} \Longrightarrow f[x_1,x_2,x_3] = \frac{\frac{-21}{2}-\frac{-7}{4}}{5} = \frac{-7}{4}$$

et $f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}; f[x_1,x_2] = \frac{-7}{4}; f[x_0,x_1] = \frac{-13}{4} \Longrightarrow f[x_0,x_1,x_2] = \frac{3}{8} \Longrightarrow D_3 = \frac{-17}{48}$

D'ou : $$\begin{aligned} P_3(x) &= -14 + \tfrac{45}{4}(x+2) + \tfrac{-13}{4}(x^2+3x+2) + \tfrac{-17}{48}(x^3+x^2-4x-4) \\ &= \tfrac{-17}{48}x^3 + \tfrac{-173}{48}x^2 + \tfrac{35}{12}x + \tfrac{41}{12}. \end{aligned}$$

2. Estimation la valeur d erreur au point $x = 0$ si $f^{(4)}(x) \leq 10^{-2}$:

$$\begin{aligned} |E_t(0)| &= |\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \prod_{i=0}^{3}(0-x_i)| \\ &= |\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \prod_{i=0}^{3}(-x_i)| \\ &\leq |\frac{10^{-2}}{4!}(2)(1)(-2)(-4)| \\ &\leq \frac{10^{-2}}{24}(16) = \tfrac{2}{300} \simeq 0.006666667. \end{aligned}$$

Exercice 5 :

▷ Soient les polynomes de Tchebychev definis par :
$T_n(x) = cos(n.arccos(x))$ pour tout $x \in [-1,1]$ et $n \geq 0$.

1. Verifier que $T_0(x) = 1, T_1(x) = x \quad et \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ et en dduire que T_n est un polynome de degre n avec un coefficient dominant 2^{n-1} :

$\bullet T_0(x) = cos(0.arccos(x)) = cos(0) = 1$
$\bullet T_1(x) = cos(arccos(x)) = x$

$$\begin{aligned} \bullet T_{n+1}(x) &= cos((n+1).arccos(x)) = cos(n.arccos(x) + arccos(x)) \\ &= cos(n.arccos(x) \times cos(arccos(x)) - sin(n.arccos(x) \times sin(arccos(x)) \\ &= T_n(x) \times x - sin(n.arccos(x) \times sin(arccos(x)) \\ &= x.T_n(x) - \tfrac{1}{2}[cos(n.arccos(x) - cos(arccos(x)) - cos(n.arccos(x) + cos(arccos(x))] \\ &= x.T_n(x) - \tfrac{1}{2}[cos((n-1).arccos(x) - cos((n+1).arccos(x)] \\ &= x.T_n(x) - \tfrac{1}{2}[T_{n-1}(x) - T_{n+1}(x)] \\ &= x.T_n(x) - \tfrac{1}{2}.T_{n-1}(x) + \tfrac{1}{2}.T_{n+1}(x) \end{aligned}$$

Dou :

$$T_{n+1}(x) - \tfrac{1}{2}.T_{n+1}(x) = x.T_n(x) - \tfrac{1}{2}.T_{n-1}(x) \Longrightarrow T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

• On demontre par rcurrence que T_n est un polynome de degre n avec un coefficient dominant 2^{n1} :

▷**Initialisation** : On vrifie que P(n) est vraie pour une valeur de n=1 :
On a $T_1 = x = 2^{11}.x$est un polynome de degre 1 avec un coefficient dominant $2^{1-1} = 1$
donc P(1) est verifier.

▷**Heredite** :On suppose que P(n) est vraie , et on dmontre que cela entraine que P(n + 1) est vraie.
Soit T_n est un polynome de degre n avec un coefficient dominant 2^{n1} :
D apres la question 1) $T_{n+1} = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \Longrightarrow deg(T_{n+1}) = Max[deg2X.(T_n), deg(T_{n-1})]$
$\Longrightarrow deg(T_{n+1}) = deg2X.(T_n)$
$\Longrightarrow deg(T_{n+1}) = deg(2X) + deg(T_n) = 1 + n$

De meme on demontre que le coefficient dominant deT_{n+1} est 2^n :

2. Determination les racines et les extremums de T_n :

▷**Les racines de** T_n :

$$\begin{aligned} T_n(x)=0 &\Longleftrightarrow cos(n.arccos(x))=0 \\ &\Longleftrightarrow cos(n.arccos(x))=cos(k\pi+\tfrac{\pi}{2}) \\ &\Longleftrightarrow arccos(x)=\tfrac{1}{n}.(k\pi+\tfrac{\pi}{2}) \\ &\Longleftrightarrow x=cos(\tfrac{1}{n}.(k\pi+\tfrac{\pi}{2}))=cos(\tfrac{(2k+1)\pi}{2n}) \end{aligned}$$

Donc les racines de T_n sont $x_k=cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n})$, avec $k=0,1,\cdot,(n-1)$.

▷**Les extremums de** T_n :

$$\begin{aligned} T_n^{'}(x)=0 &\Longleftrightarrow [cos(n.arccos(x)]^{'}=0 \\ &\Longleftrightarrow \tfrac{-n}{\sqrt{x^2+1}}.sin(n.arccos(x)=0 \\ &\Longleftrightarrow sin(n.arccos(x)=0, car \tfrac{-n}{\sqrt{x^2+1}}\neq 0. \\ &\Longleftrightarrow sin(n.arccos(x)=sin(k\pi) \\ &\Longleftrightarrow arccos(x)=\tfrac{1}{n}.k\pi \\ &\Longleftrightarrow x=cos(\tfrac{k\pi}{n}) \end{aligned}$$

Donc les extremums de T_n sont : $x_k=cos(\frac{k\pi}{n})$, avec $k=1,2,\cdot,(n-1)$.

3. soit la fonction $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ dfinie sur l intervalle [-1, 1] et $n=2$.

(a) Dtermination de l interpolant de f aux points quidistants et aux points de Tchebychev :

• Aux points equidistants :

Sur l intervalle [-1, 1] on a : $x_0=-1, x_1=0$ et $x_2=1$:

Si on choisit la methode de Newoton on a :

$N_0(x)=1 \quad , \quad N_1(x)=x-x_0=x+1$ et $N_2(x)=(x-x_0).(x-x_1)=x^2+x$.

▷D_0, D_1 et D_2 sont les differences divisees d'ordre 1 ,2 et 3 :

$D_0=f(x_0)=f(-1)=\frac{1}{2} \quad et \quad D_1=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{1}{2}$ et $D_2=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$ avec :

$f[x_1,x_2]=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{-1}{2} \quad et \quad f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{1}{2}\Rightarrow D_2=\frac{-1}{2}$.

Alors on obtient l interpolant : $P(x)=\frac{-1}{2}.x^2+1$.

• Aux points Tchebychev :

les racines de T_n sont $x_k=cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n})$, pour $k=0,1,2; n=3$ on obtient :

$x_0=cos(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}, x_1=cos(\frac{\pi}{2})=0$ et $x_2=cos(\frac{(5)\pi}{6})=\frac{-\sqrt{3}}{2}$

De meme si on choisit la methode de Newoton on a :

$N_0(x)=1 \quad , \quad N_1(x)=x-x_0=x-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $N_2(x)=(x-x_0).(x-x_1)=x^2-\frac{\sqrt{3}}{2}x$

$D_0=f(x_0)=f(-1)=\frac{4}{7} \quad et \quad D_1=\frac{-2\sqrt{3}}{7}$ et $D_2=\frac{4}{7}$.

Alors on obtient l interpolant : $P^{'}(x)=\frac{4}{7}.x^2-\frac{4\sqrt{3}}{7}x+1$.

(b) pour $x=\frac{1}{2}$. Comparer les erreurs obtenues par linterpolant de f dans la question precedente :

• Avec les points equidistants :

$$|E_c(\tfrac{1}{2})|=|f(\tfrac{1}{2})-P(\tfrac{1}{2})|=|\tfrac{4}{5}-\tfrac{7}{8}|=\tfrac{3}{40}\simeq 0.075000$$

• Avec les points de Tchebychev :

$$|E_c^{'}(\tfrac{1}{2})|=|f(\tfrac{1}{2})-P^{'}(\tfrac{1}{2})|=|\tfrac{4}{5}-\tfrac{6}{7}|=\tfrac{2}{35}\simeq 0.057142857$$

Alors : $E_c^{'}<Ec$.

Conclusion :

Pour obtenir la meilleure estimation possible pour une fonction f donnee, il faut mieux choisir les points de Tchebychev.