جامعة باتنة ٢ كلية الرياضيات و الاعلام الالي قسم الرياضيات

Université de Batna –2–
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Master 1- EDP et applications
Module : EDO 1
2019 - 2020

Travaux Dirigés (1)

Exercice 1. Pour chacun des problèmes de Cauchy suivants, justifier l'existence d'une unique solution maximale et déterminer son intervalle de définition :

$$x'(t) = 1 + x(t), \quad x(0) = 1,$$
$$x'(t) = x^{\frac{4}{3}}(t), \quad x(0) = 1,$$
$$x'(t) = sinx(t), \quad x(0) = 2.$$

Exercice 2. Montrer que le problème de Cauchy suivant

$$x'(t) = x^{\frac{2}{3}}(t), \quad x(0) = 0$$

admet une infinité de solutions.

Exercice 3. Soit E l'espace de Banach des suites réelles tendant vers zéro, muni de la norme définie par $||x||_\infty = sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$ pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(1) Montrer que l'application $f : E \to E$ définie par

$$f(x) = f(x_n) = \sqrt{|x_n|} + \frac{1}{n+1}, \quad \forall x = (x_n) \in E, \quad n \in \mathbb{N}$$

est continue de E dans lui même.

(2) Considérons le problème de Cauchy

$$x'(t) = f(x(t)), \quad x(0) = 0_E.$$

Supposons que $x \in C^1(]-a,a[;E)$ soit une solution avec $a > 0$. Montrer qu'on a

$$x_n(t) > 0, \qquad \frac{x_n'(t)}{\sqrt{x_n(t)}} > 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0,a[.$$

(3) Déduire alors qu'on a $x_n(t) \geq \frac{t^2}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall t \in [0,a[$.

(4) Que peut-on conclure ?

Exercice 4. Considérons l'équation de Riccati $x'(t) = x^2(t)$.

(1) Déterminer l'intervalle d'existence de la solution maximale du problème de Cauchy associé à l'équation de Riccati en fonction de la donnée initiale $x(0) = x_0$.

(2) Soit $y(.)$ une fonction continue sur un intervalle J contenant 0 avec

$$y(t) \leq e^{\int_0^t y(s)ds}, \forall t \in J.$$

Montrer (en utilisant la question 1. ainsi que le lemme de Gronwall) que $y(t) \leq \frac{1}{1-t}, \quad \forall t \in J, \quad t < 1.$

(3) Considérons maintenant l'équation $x'(t) = x^2(t) + t^2$, et soit $x(.)$ la solution maximale du problème de Cauchy associé avec condition initiale $x(0) = 0$.

(3.1) Posons $z(t) = e^{(-\int_0^t x(s)ds)}$. Ecrire une EDO d'ordre deux de l'inconnue $z(.)$ et montrer que $z'0) = z''(0) = z^{(3)}(0) = 0$.

(3.2) Résoudre cette EDO en cherchant une solution $z(.)$ sous forme d'une série entière.

(3.3) Déduire alors que $x(.)$ est définie sur un intervalle $]-a,a[$ avec $a > 2$.