Université de Batna –2–
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

1ère année Master
Option : EDP et Applications
2018-2019

TRAVAUX DIRIGÉS I
MODULE : EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

Exercice 1. (Lemme de Gronwall). Soient $u, v : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues, telle que pour $c > 0$ on a

$$u(t) \leq c + \int_0^t u(\tau)v(\tau)d\tau, \quad \forall t \in [0,T]$$

Montrer alors que

$$u(t) \leq c e^{\int_0^t v(\tau)d\tau}, \quad \forall t \in [0,T]$$

Exercice 2. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = -\frac{2t}{1+t^2}x(t) - t^2x^2(t) \\ x(0) = 1 \end{cases} \tag{P-C}$$

(1) Montrer que le problème (P-C) admet une unique solution maximale $x : J =]T_\star, T^\star[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 avec $T_\star < 0 < T^\star$.

(2) Vérifier que x est de classe C^2. Est-elle de classe C^∞ ?

(3) Montrer que $x(t) > 0$, pour tout $t \in J$.

(4) En déduire que x est strictement décroissante sur $[0, T^\star[$ et que

$$0 < x(t) \leq 1, \quad \forall t \in [0, T^\star[.$$

(5) Montrer que $T^\star = +\infty$.

(6) Montrer que $\lim_{t\to+\infty} x(t)$ existe et vaut 0.

(7) Vérifier que $y(t) = \frac{1}{x(t)}$ est bien définie sur l'intervalle J. Trouver une EDO d'ordre 1 sur y.

(8) Expliciter y et vérifier que

$$x(t) = \frac{1}{(1+t^2)(1+t-\arctan t)}, \quad \forall t \in J.$$

(9) En déduire que $T_\star$ est fini e que

$$T_\star > -\frac{\pi}{2} - 1.$$

Exercice 3. Soient F une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \quad \mathbb{R}^n$. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = -\nabla F(x(t)) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{P-C}$$

où ∇F est le gradient de F défini par $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$. On suppose de plus que

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} F(x) = +\infty.$$

(1) Montrer que (P-C) admet une solution maximale unique définie sur $]T_\star, T^\star[$ et que la fonction $F(x(t))$ est décroissante. En déduire que $T^\star = +\infty$.

(2) En considérant le cas $n = 1$ et $F(x) = \frac{x^4}{4}$ montrer que l'on peut avoir $T_\star > -\infty$.