Université de Batna 2
Faculté de M I
Département de Mathématiques
3ème année, module EPM-2019/2020

Travaux Dirigés 2

Exercice 1.

Résoudre les problèmes aux limites du premier ordre suivants par la méthode des caractéristiques et tracer le domaine d'étude:

1-Le premier problème:

$$\begin{cases} \partial_{x_1} u + \partial_{x_2} u = u^4, & \text{si} \quad (x_1, x_2) \in \Omega \\ u(x) = f(x), & (x_1, x_2) \in \Gamma \subset \partial\Omega \end{cases}$$

où $\Omega = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_2 > 0\right\}$ et $\Gamma = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_2 = 0\right\}$

2-Le deuxième problème:

$$\begin{cases} \partial_x u + 3\partial_y u = u, x \in \mathbb{R} \\ u(x, y) = \sin y \text{ si } y = \theta x \ , \end{cases}$$

avec θ une constante réelle.

3- Le troisième problème:

$$\begin{cases} u_{x_2} - x_1 u_{x_1} = 2u,\ x \in \Omega \\ u(x_1, x_2) = h(x^2 + 1),\ x \in \Gamma \end{cases}$$

où $\Omega = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 > 0 \text{ et } x_2 > 0\right\}$ et $\Gamma = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_2 = 0\right\}$

Exercice2.

En utilisant la méthode des caractéristiques résoudre le problème:

$$\begin{cases} (u_{x_1})^2 + (u_{x_2})^2 = 1,\ \text{sur } \Omega \\ u(x_1, 2x_1) = 1,\ \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Exercice 3.

Soit le problème D'EDP du premier ordre suivant:

$$\begin{cases} u_{x_1} u_{x_2} = u, & (x_1, x_2) \in \Omega \\ u(x_1, x_2) = x_2^2, & (x_1, x_2) \in \Gamma \end{cases} \tag{1}$$

où $\Omega = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_1 > 0\right\}$ et $\Gamma = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_1 = 0\right\}$.

1- Tracer le domaine d'étude.

2- Utiliser la méthode des caractéristiques pour déterminer une solution à ce problème.

Exercice 4.

On considère le problème suivant:

$$\begin{cases} u_x + u_y + u = e^{x+2y}, \text{ sur } \Omega \\ u(x,0) = 0, \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

Résoudre ce problème par la méthode des caractéristiques et que représentent les courbes caractéristiques associées.

Exercice 5.

Soit l'EDP suivante:

$$\partial_t u(t,x) + c(t,x)\partial_x u(t,x) = 0, \; x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

1- Que représente cette EDP Physiquement?

2- Trouver une solution à cette EDP en posant $c(t,x) = -tx$ et que représentent les courbes caractéristiques dans ce cas.

Exercice 6.

Utiliser la méthode des caractéristiques pour résoudre le problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} u_x + 3y^{\frac{2}{3}} u_y = 2, \text{ sur } \Omega \\ u(x,1) = 1 + x, \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$