

Série N 1

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ?
2. Calculer $\nabla f(x, y)$.
3. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$?
4. Que peut-on conclure sur la différentiabilité de la fonction f sur \mathbb{R}^2 ?

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ?
2. Calculer $\nabla f(x, y)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$; calculer ensuite $\nabla f(0, 0)$.
3. La fonction f est-elle différentiable sur \mathbb{R}^2 ?
4. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$?

Exercice 3. Soit la fonction de deux variables

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4y^2 x^3 - y^5 - 2x^7}{3x^4 + 2y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Soit (v_1, v_2) un vecteur unitaire du plan. En utilisant la définition théorique de la dérivée directionnelle, déterminer (en fonction de v_1, v_2) la dérivée directionnelle $\partial_v f(0, 0)$ (si elle existe) dans la direction $v = (v_1, v_2)$ au point $(0, 0)$.

Exercice 4. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = e^{2x+y}, \text{ soit } a = (1, 2), v = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}).$$

- Vérifie que v est un vecteur unitaire de \mathbb{R}^2 .
- Déterminer la dérivée de f dans la direction v au point a .

Exercice 5. Calculer les polynômes de Taylor d'ordre 2 au voisinage du point $(0,0)$ des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes

1. $f(x, y) = \sin x \cdot \sin y$,
2. $f(x, y) = 1 + x + y + x^2 - xy + y^2$.

Exercice 6. Soient

1.

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \langle c, x \rangle + b \quad c, x \in \mathbb{R}^n \text{ et } b \in \mathbb{R}. \quad \text{Calculer } \nabla f(x), \nabla^2 f(x).$$

2.

$$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x \mapsto g(x) = Lx + b \quad L \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \text{ et } b \in \mathbb{R}^m. \quad \text{Calculer } Jg(x).$$

3.

$$k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto k(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle + c \quad A \in M_n(\mathbb{R}), b, x \in \mathbb{R}^n \text{ et } c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Calculer } \nabla k(x), \nabla^2 k(x).$$