Université de Batna –2–
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Introduction à la Topologie
Mme. Hanachi Adelat
2019-2020

TRAVAUX DIRIGÉ I
2ÈME ANNÉE LICENCE (MA et Stat)

Exercice 1. Quelles conditions doivent vérifier deux parties distinctes A et B de E pour que $\{\emptyset, A, B, E\}$ soit une topologie sur E.

Exercice 2 Soit (E,τ) un espace topologique tel que $\forall x \in E$ on a $\{x\} \in \tau$. Montrer que τ est la topologie discrète.

Exercice 3

1- Donner un exemple d'une topologie sur E où le singleton n'est pas un fermé.

2- Donner un exemple qui montre que la réunion de deux topologies n'est pas nécessairement une topologie.

Exercice 4 Soient E un ensemble non vide (E', τ') un espace topologique et f une application de E dans E'.

1- Montrer que l'ensemble
$$\tau = \{f^{-1}(O')/O' \in \tau'\}$$
est une topologie sur E.

2- On suppose que τ' est séparée et f est injective, montrer que τ est séparée.

Exercice 5 Soit $E = \{1,8,9\}$, on munit l'ensemble E de la famille τ définie par
$$\tau = \{E, \emptyset, \{1\}, \{8\}, \{1,8\}, \{1,9\}\}$$

1. Vérifier que (E,τ) est un espace topologique.
2. Est-ce que les parties $\{1\}$ et $\{9\}$ sont fermées , ouvertes ou fermées et ouvertes à la fois ?
3. Donner $\mathscr{V}(8)$ et $\mathscr{V}(9)$.
4. Posons $A = \{8,9\}$, déterminer les points d'accumulations et les points isolés de A.
5. Montrer que $B = \{1,9\}$ est un ouvert et un fermé.

Exercice 6 Soit $\tau = \{]-x,x[, x \in [0,\infty]\}$

1- Montrer que τ est une topologie sur $\mathbb{R}$.

2- Déterminer l'adhérence, l'intérieur et la frontière d'un singleton $\{a\}$, puis d'un segment $[a,b]$

Exercice 7 Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} = ([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'intervalles fermés emboités. Démontrer que $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$. Est ce que le résultat précédent reste valable pour $I_n =]1, 1+e^{-n}[$?

Exercice 8 Démontrer que les seules parties de $(\mathbb{R}, \tau_u)$, à la fois ouvertes et fermées sont $\mathbb{R}$ et $\emptyset$.

Exercice 9 On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ de sa topologie usuelle τ_u.

1 Déterminer les ensembles intérieurs, extérieurs, adhérences et frontières des parties $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, [a,b],]a,b[$ pour $a,b \in \mathbb{R}$ et $]0,1[\cup \{2\} \cup (\mathbb{Q} \cap]3,4[)$.

2 Soit x un point d'accumulation d'une partie A de $\mathbb{R}$. Montrer, en utilisant le raisonnement par l'absurde que tout intervalle ouvert contenant x contient une infinité de points de A.

Exercice 10 Soit E un ensemble et $\mathscr{A}$ un ensemble de partie de E qui contient E et $\emptyset$. Soit $\mathscr{B}$ l'ensemble des intersections finies d'éléments de $\mathscr{A}$.

1- Montrer que $\mathscr{B}$ est stable par l'intersection finie.

2- Montrer que $\mathscr{B}$ est la base d'une topologie sur E c-à-d qu'il existe une topologie τ sur E telle que tout élément de τ est réunion d'élément de $\mathscr{B}$.

3- Application : Soit $E = \mathbb{R}$ et $\mathscr{A} = \{]-\infty, x[/x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ décrire la topologie engendrée par $\mathscr{A}$.

4- Même question pour $E = \mathbb{R}$ et $\mathscr{A} = \{]x,y[, x,y \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad x<y\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.