UNIVERSITE DE BATNA 2 **ANNEE : 2019- 2020**

MESURE ET INTEGRATION **3EME ANNEE LICENCE MATHEMATIQUE**

TD 1 TRIBUS ET MESURES

Exercice 1

1.Déterminer $\bigcap_{n\geq 0}\left]1,1+\frac{1}{n+1}\right]$, $\bigcap_{n\geq 1}\left]1-\frac{1}{n},2\right]$,$\bigcap_{n\geq 0}\left]1,2+\frac{1}{n+1}\right]$, $\bigcup_{n\geq 0}\left[\frac{1}{n+1},+\infty\right[$.

2. Montrer que $\bigcap_{n\geq 1}\left[1,2+\frac{1}{n+1}\right]$ = [1,2]

3. Déterminer les limites $\lim_n\left[-\frac{1}{n},1\right]$, $\lim_n\left]-\frac{1}{n},1\right]$.

4 .Donner un exemple de suite non constante de parties de $\mathbb{R}$ dont la limite est $]0,1]$.

5.Déterminer les limites supérieure et inférieure de la suite$(B_n)_{n\geq 1}$ de parties de $\mathbb{R}$ définie par :$B_{2n-1}=\left]-2-\frac{1}{n},1\right]$ et $B_{2n}=\left[-1,2+\frac{1}{n^2}\right[$

6.Existe-il une suite$(C_n)_{n\geq 1}$ de parties de $\mathbb{R}$ telle que :$\limsup C_n=[-1,2]$ et $\liminf C_n=[-2,1]$?

Exercice 2 (Image directe et réciproque de tribu)

Soient E, F deux ensembles non vide et f: E → F une application.

1 .Soit $\mathcal{F}$ une σ − algèbre (tribu)sur F.Posons$\tau=f^{-1}(\mathcal{F})=\{f^{-1}(B): B\in\mathcal{F}\}$.Montrer que τ une σ − algèbresurE .

2 .Soit $\mathcal{M}$ une σ − algèbresurE.Soit $f(\mathcal{M})=\{f(A): A\in\mathcal{M}\}$.Est ce que $f(\mathcal{M})$Est une σ − algèbre sur F ?

Exercice 3

Soient A_1 , A_2, … … , A_{2019} des ensembles non vide de $\mathbb{R}$ disjoints deux a deux avec$\bigcup_{k=1}^{k=2019}A_k=\mathbb{R}$.
Montrer que $\tau=\{\bigcup_{k\in I}A_k : I\subset\{1,2,\dots\dots..,2019\}\}$ est une σ-algèbre sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Soit $(E,\mathcal{F},\mu)$ un espace mesuré ou μ est une mesure de probabilité .On note
$\Gamma=\{A\in\mathcal{F};\mu(A)=0$ ou $\mu(A)=1\}$. Montrer que Γ est une tribu sur E.

Exercice 5 (**σ** − algèbre engendrée par une famille)

On pose $C=\{[a,b],\ a\leq b$ et $a,b\in]0,1[\}$. Montrer que $\sigma(C)=\mathcal{B}(]0,1[)$.

Exercice 6

Soient A un borélien de $\mathbb{R}$ tel que $\lambda(A)>1$ *et* $A_n=A\cap[n,n+1[$.
Montrer que $A=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}A_n$ et que$\lambda(A)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda((A-n)\cap[0,1[)$.

Exercice 7

Soit $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ l'espace mesuré de Lebesgue.
Pour $A\in\wp(\mathbb{R})$et $a\in\mathbb{R}$ on note$A+a=\{x+a : x\in A\}$.

1.Montrer queτ_a={$A\in\wp(\mathbb{R})$: $A+a\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$} est une σ-algèbre sur$\mathbb{R}$.

2. Montrerque$\mathcal{B}(\mathbb{R})=\tau_a$.

3. Pour tout $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ on pose $\mu(A)=\lambda(A+a)$. Montrer que μ est une mesure sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

4 . Montrer que pour tout $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a $\lambda(A+a)=\lambda(A)$.

Exercice 8

Soit $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ l'espace mesuré de Lebesgue.

1.Soit $A=\bigcup_{n\geq 0}\left[n,n+\frac{1}{2^n}\right]$ .Calculer λ(A).

2.Soit $x\in\mathbb{R}$, Calculer $\lambda(\{x\})$.

3.Soitx_0,x_1,x_2, … … … . $\in\mathbb{R}$,calculer $\lambda(\bigcup_{n\geq 0}\{x_n\})$.

4.On déduire que $\lambda(\mathbb{Q})=0$.Calculer $\lambda([0,1]\setminus\mathbb{Q})$.