Université de Batna 2. Mathématiques (L2) **Topologie** Semestre 1 (18-19)

Série d'exercices N° 1

Quelques rappels sur le corps réel $\mathbb{R}$

Exercice 1

Soit $f : X \to Y$ *et* $A, B \subset X$ *et* $(A_i)_{i\in I}$ *est une collection de sous ensembles de* X *alors :*

(a) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$; (b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
(c) $f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B)$; (d) $f(\cup_{i\in I} A_i) = \cup_{i\in I} f(A_i)$;
(e) $f(\cap_{i\in I} A_i) \subset \cap_{i\in I} f(A_i)$.

Si $A, B \subset Y$ *et* $(B_i)_{i\in I}$ *est une collection de sous ensembles de* Y *alors*

(a) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$; (b) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;
(c) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$; (d) $f^{-1}(\cup_{i\in I} B_i) = \cup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$;
(e) $f^{-1}(\cap_{i\in I} B_i) = \cap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

Exercice 2

Soient $f : X \to Y, A \subset X$ *et* $B \subset Y$

1. *Montrer que* $A \subset f^{-1}(f(A))$ *et on obtient égalité si* f *est injective.*
2. *Montrer que* $f(f^{-1}(B)) \subset B$ *et on obtient égalité si* f *est surjective.*

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = x^2 - 1$. *Trouver*

$$f^{-1}(\{15\}, \quad f^{-1}(\{-16\}, \quad f^{-1}(\{x : x \leq 0\}, \quad f^{-1}(\{x : 3 \leq x \leq 24\}.$$

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \sin(\pi x)$

1. *Montrer que* f *n'est ni injective, ni surjective.*
2. *Choisissez des restrictions sur le domaine de* f *de telle sort que la nouvelle fonction est surjective mais pas injective.*
3. *Choisissez des restriction sur le domaine de* f *de telle sort que la nouvelle fonction est injective mais pas surjective.*
4. *Choisissez des restriction sur le domaine de* f *de telle sort que la nouvelle fonction est bijective.*

Exercice 5

Soient A *et* B *deux parties bornées de* $\mathbb{R}$. *On note* $A + B = \{a + b : (a, b) \in A \times B\}$.

1- *Montrer que* $\sup A + \sup B$ *est un majorant de* $A + B$.
2- *Montrer que* $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Exercice 6

Soit I *le sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *défini par* $I = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq \frac{x}{2} + \frac{1}{x+1} < 2\}$.

1. *Montrer que* I *est la réunion de deux intervalles que l'on déterminera.*
2. *Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément de ces intervalles.*