Université de Batna2 **$2^{ème}$ année Mathématiques**

Faculté de mathématiques et d'informatique **2018-2019**

Département de mathématiques **Module : Analyse 04**

Série 1

Exercice 1 :

1) Représenter géométriquement la boule B(0,1) pour les trois normes : $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_3$ dans $\mathbb{R}^2$.
2) Montrer qu'on ne peut pas induire une norme de la distance discrète sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer qu'une partie non vide $A \subset \mathbb{R}^n\,(n \geq 1)$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Exercice 2 : Déterminer et représenter le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$1)\, f(x,y) = x + \ln y,\ 2)\, f(x,y) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}},\ 3)\, f(x,y) = \frac{x\cos y}{x^2 - 4y^2},\ 4) f(x,y) = \sqrt{x+y}.$$

Exercice 3 : Représenter les courbes de niveaux des fonctions suivantes :

$$1)\, f(x,y) = x + y - 1,\ 2)\, f(x,y) = e^{y-x^2},3)\ f(x,y) = y - \cos x.$$

Exercice 4 : 1) Montrer que pour tout (x,y) dans $\mathbb{R}^2$ on a : $|2xy| \leq x^2 + y^2$.

2) Soit $f : \mathbb{R}^2 / \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Montrer que $\forall (x,y) \neq (0,0) : |f(x,y)| \leq 4\|(x,y)\|_2$ et en déduire que f admet une limite finie au point $(0,0)$.

Exercice 5 : Calculer, en cas d'existence, les limites suivantes :

$$1) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2},\ 2) \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{x-y},\ 3) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\ln(1+x^3)}{y(x^2+y^2)},\ 4) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

$$5) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x| + |y|}{x^2 + y^2},\ 6) \lim_{(x,y)\to(-a,a)} \frac{\sin(x+y)}{x+y} / a \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6: Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par:

$$f(x,y) = \begin{cases} x.y / (|x.y| + (x+y)^2)\ si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0\ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Etudier l'existence de $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

2) Vérifier que $\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) = \lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) = 0.$

3) Que peut –on conclure ?

Exercice 7: Soit $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction définie par: $u(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}.$

On pose: $g(x,y) = x.u(y) + y.u(x) \,/\, \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2.$

1) Vérifier que la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ existe.
2) Etudier l'existence des limites $\lim_{x\to 0} g(x,y), \lim_{y\to 0} g(x,y), \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} g(x,y))$ et $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} g(x,y)).$
3) Que peut-on conclure ?

Exercice 8: Etudier la continuité des deux fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x.y}{\sqrt{x^2+3y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases} \quad ; \quad g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

-La fonction f est-t-elle bornée sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 9 : Soit la fonction définie par : $f(x,y)=(x^2+y^2).\ln(x^2+y^2)$

1) Déterminer D le domaine de définition de f et étudier sa continuité sur D.
2) f est-t-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 10 : Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^2 / \{(0,0)\}$ par:

$$f(x,y)=\frac{x.y^2}{x^2+y^4} \;; \qquad g(x,y)=\frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{x^2+y^2}.$$

Montrer qu'elles ne sont pas prolongeables par continuité en $(0,0)$.

Exercice 11 : Montrer que la fonction $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ définie par:

$$f(x,y,z)=\begin{cases}(e^{xyz}, xyz\ln(|x|+|y|+|z|)) & si\ (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ (e^{xyz},0) & si\ (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

est continue au point $(0,0,0)$.

Exercice 12 : Montrer que la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ définie par
$f(x,y)=(\ln(|x.y|+1), e^{xy}, \sin(xy))$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$.