Université de Batna 2
Faculté de M I, Département de Mathématiques
2ème année, module Analyse complexe

Travaux Dirigés 1 (2018/2019)

Exercice 1.1- Écrire sous forme algébrique les nombres complexe suivants:
$z_1 = \frac{1+i}{3+4i}$, $z_2 = \frac{(12-5i)(3+4i)}{1+2i}$, $z_3 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{10}$, $z_4 = (1+i\sqrt{3})^5$,
$z_5 = \log(1-i\sqrt{3})$, $z_6 = \frac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}-i)^6}$, $z_7 = \sum\limits_{n=0}^{7}(\frac{1-i}{\sqrt{2}})^n$

2- Déterminer dans le plan complexe l'ensemble des points tels que:
a) $\frac{z-2}{z-3} \in \mathbb{R}$, b) $\frac{z-2}{z-3}$ soit imaginaire pur, c) $1<\operatorname{Im} z < 2$ ou $-2<\operatorname{Re} z < 2$

Exercice 2.
1- Calculer les limites suivantes:
1) $\lim\limits_{z\to 2} \frac{\sqrt{z}-\sqrt{2}}{z-2}$, 2) $\lim\limits_{z\to 2i} (2\operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z)$, 3) $\lim\limits_{z\to 0}(\cos z)^{\frac{1}{z^2}}$, 4) $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$

Exercice 3.
1- Supposons que $\operatorname{Im} z > 0$, montrer alors que : $\operatorname{Im}(\frac{z}{1+z}) > 0 \Leftrightarrow |z| < 1$.
2- Soient $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, montrer que :
a) $|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})$
b) $|z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|$

Exercice 4. Soit $(z_n)_n$ une suite de nombres complexes, tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = \operatorname{Re} z_n \ge 0$.
Supposons que les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n^2$ sont convergentes.
1- Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq: $\forall n \ge n_0 \Rightarrow x_n^2 \le x_n$, en déduire que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n^2$ est convergente.
2- Montrer que si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |z_n|^2$ c.onverge$\not\Rightarrow \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |z_n|$ converge.

Exercice 5.
1- Étudier la continuité des fonctions suivantes: $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1+z^2}$, $g(z) = \begin{cases} \frac{z^2+iz+2}{z-i} & \text{si } z \neq i \\ 3i & \text{si } \quad z = i \end{cases}$
2- Montrer que la fonction $f(x,y) = \frac{x+iy}{x-iy}$ n'admet pas de prolongement par continuité à l'origine $(0,0)$

Exercice 6. Ètudier la différentiabilité des fonctions suivantes: 1) $f(z) = \overline{z}$, 2) $g(z) = z^2$

Exercice 7.$a)$ Montrer que $u = e^{-x}(x\sin y - y\cos y)$ est harmonique, $b)$ Déterminer v tq: $f(z) = u + iv$ soit analytique.
$c)$ Montrer que $f(z) = z^2\overline{z}$ n'est pas analytique

Exercice 8. Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction analytique dans Ω. Montrer que
$f : \Omega \to \mathbb{C}$ est constante$\Leftrightarrow$ $u = \operatorname{Re} f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est constante$\Leftrightarrow$ $v = \operatorname{Im} f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est constante$\Leftrightarrow$ $|f|$ est constante$\Leftrightarrow$ $\overline{f}$ est analytique.