Université de Batna 2
Département de Mathmatiques
Master 1

Année universitaire: 2018/2019.

Analyse fonctionnelle appliquée
Série d'exercices n°2

Exercice 1 *:*

Soit $H = L^2(0,1)$ *et* $T = \frac{d}{dx}$ *un opérateur tel que*

$$D(T) = \{f \in H : f \text{ est absolument continue et } f' \in H\}.$$

Montrer que l'opérateur T *est fermé.*

Exercice 2 *: Soient* H_1 *et* H_2 *des espaces de Hilbert sur* $\mathbb{K}$, *et soit* $T \in L(H_1, H_2)$, *Montrer que*

1. $R(T^*)^\perp = \ker(T)$.
2. $R(T)^\perp = \ker(T^*)$.
3. $\overline{R(T)} = \ker(T^*)^\perp$.
4. $\overline{R(T^*)} = \ker(T)^\perp$.

Exercice 3 *: Soient* H_1 *et* H_2 *deux espaces de Hilbert et* $T : H_1 \to H_2$ *un opérateur linéaire. Montrer que* T *est compact si et seulement si* T^* *est compact.*

Exercice 4 *: Soient* H *un espace de Hilbert et* T *un opérateur linéaire sur* H *le noyau de* T *est défini par* $ker(T) = \{x \in D(T) : Tx = 0\}$. *Montrer que*

1. *Si le domaine de* T *est dense dans* H, *alors* $ker(T^*) = R(T)^\perp$.
2. *Si* T *est un opérateur fermé, alors* $ker(T) = R(T^*)^\perp$.

Exercice 5 *: Soient* H_1 *et* H_2 *deux espaces de Hilbert et* $T : D(T) \subset H_1 \to H_2$ *un opérateur linéaire de domaine dense et* $J : H_1 \times H_2 \to H_2 \times H_1$ *définie par* $J(h_1, h_2) = (-h_2, h_1)$.

1. *Montrer que* J *est linéaire continue et bijective et* $J^* = J^{-1}$.
2. *Montrer que* $G(T^*) = [J(G(T))]^\perp$.
3. *Déduire que* T^* *est un opérateur fermé.*

Exercice 6 *:*

Soit $H = L^2(0,1)$ *et* $T = \frac{d^2}{dx^2}$ *un opérateur tel que*

$$D(T) = \{f \in H : f, f' \text{ sont absolument continues} \quad f(0) = f(1) = 0 \text{ et } f'' \in H\}.$$

Déterminer T^* *l'adjoint de* T.