Université de Batna 2

Faculté de mathématiques et informatique

Département de Mathématiques

Introduction à la topologie

Corrigé de la série (2) de travaux dirigés

<u>Exercice 02</u> : Intuitivement $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite de Cauchy mais $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite De Cauchy. Effectivement :

pour $\varepsilon = 1$, $\forall m > n \geq 1 : d(x_m, x_n) = m+n > 1$

donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}^*$

pour $m > n$: $\frac{2}{m} \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \neq d(y_m, y_n) < \varepsilon$

Ça fait $\frac{2}{m} < \varepsilon$ dans ce cas il suffit prendre $n_0 = [\frac{2}{\varepsilon}] + 1$. de même pour $n \geq m$, on prend $n_0 = [\frac{2}{\varepsilon}]+$

pour $m = n$, de la difinition de la distance $d(y_m, y_n) = 0$, donc $d(y_m, y_n) < \varepsilon$, $\forall \varepsilon \in]0, +\infty[$

on en déduit que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = [\frac{2}{\varepsilon}] + 1, \forall m, n > n_0 \Rightarrow d(y_m, y_n) < \varepsilon$$

il revient au même de dire que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}^*$

2) La suite de Cauchy $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente dans $\mathbb{Q}^*$

Car: On suppose y_n tend vers $\ell \in \mathbb{Q}^*$, il résulte que $\lim 1/n = 1/\ell = 0$ qui implique que $1/\ell = 0$, donc Contradiction, alors $(\mathbb{Q}^*, d)$ n'est pas un espace complet.

<u>Exercice 03</u>: Soit $y \in F$, comme f est surjective il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$, de la densité de A dans E, il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A tend vers x, ensuite $f(x_n)$ converge vers $f(x) = y$, puisque f est continue sur E, donc $\exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}} / y_n = f(x_n)$ où $y_n \longmapsto y$, ce qui signifie que $\overline{f(A)} = F$

<u>Exercice 04</u>:

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de M_k t.q f_n converge vers f c-à-d $\lim d_\infty(f_n, f) = \lim \sup\limits_{x\in[a;b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$

On a:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$$
$$\leq \sup_{x\in[a;b]} |f_n(x) - f(x)| + k|x-y| + \sup_{y\in[a;b]} |f_n(y) - f(y)|$$

On passe à la limite $(n \longmapsto +\infty)$ on trouve

$$|f(x) - f(y)| \leq 0 + k|x-y| + 0$$

donc f est un élément de M_k, ce qui signifie que M_k est fermé. (2)

2)

On considère f un élément fixé de M_K, il résulte de la fermeture de M_K que $\exists (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.q f_n tend vers f aussi $\exists \alpha > 0$ t.q $d_\infty(f_n, f) \leq \alpha$

$\forall g \in M_K$:

$$d_\infty(f, g) \leq \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - f_n(x)| + K|f_n(y) + f_n(x)| + \sup_{y \in [a,b]} |f_n(y) - g(y)|$$

$$\leq \alpha + K(b-a) + \alpha = 2\alpha + K(b-a)$$

donc $\exists r = 2\alpha + K(b-a)$ t.q $M_K \subset \overline{B}(f, r)$

du fait que tout espace métrique séparé, on en déduit que M_K est compact donc M_K est fermé

3) Selon le théorème des accroissement finis, pour tous $(x;y) \in [a;b]^2$ il existe $C_{x,y} \in]x;y[$ t.q $f(x)-f(y) = f'(C_{x,y})(x-y)$, qui conduit à

$$|f(x)-f(y)| = |f'(C_{x,y})||x-y|$$

et par l'hypothèse $|f'(x)| \leq K$, $\forall x \in [a,b]$

on trouve que :

$$|f(x)-f(y)| \leq K|x-y| \quad , \forall x \in [a,b]$$

Donc $f \in M_K$.

Exercice 05 : On a :

$$-1 \leq \cos 2x \leq 1 \Rightarrow -\tfrac{2}{5} \leq \tfrac{2}{5}\cos 2x \leq \tfrac{2}{5}$$

$$\Rightarrow -\tfrac{4}{5} \leq \tfrac{2}{5}\cos 2x - \tfrac{2}{5} \leq \tfrac{4}{5}$$

$$\Rightarrow |f'(x)| \leq \tfrac{4}{5} \quad \cdots \circledast$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, par le théorème des accroissement finis il existe $C_{x,y} \in]x;y[$ satisfait $f(x)-f(y) = f'(C_{x,y})(x-y)$

mais de $\circledast$, on obtient :

$$|f(x)-f(y)| \leq \tfrac{4}{5}|x-y| \quad , \forall x,y \in \mathbb{R}.$$

le rapport $\frac{4}{5}$ de l'intervalle $]0;1[$, donc f est Contractante, en plus $(\mathbb{R};|\cdot|)$ est complet

Dans ce cas le theorème du point fixe assure l'existence d'un point fixe de f, d'autre manière $\exists! x \in \mathbb{R}$ t.q $f(x) = x$, mais comme $f(0)=0$ donc on déduit que f admet racine unique sur $\mathbb{R}$ qui est $x = 0$.

<u>Exercice 06</u>: On va paraitre les hypothèses du théorème du point fixe, pour l'application

$$f : [1;2] \longmapsto \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

On a vu que $(\mathbb{R};|\cdot|)$ est complet, comme $[1;2]$ est fermé alors $([1;2], |\cdot|)$ est un sous espace complet.

en plus :

$$1 \leq x \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{2}{x} \leq 2$$
$$\Rightarrow 3 \leq \frac{2}{x} + x \leq 4$$
$$\Rightarrow \frac{3}{4} \leq \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \leq 2$$
$$\Rightarrow f([1;2]) \subset \left[\frac{3}{4}; 2\right]$$

D'autre côté : par une manière similaire à celle de l'exercice (5) : on a $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

et $\forall (x,y) \in [1,2]^2 \; |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4}|x-y|$

alors f est une application contractante de rapport $1/4$

au-delà f admet un point fixe dans $[1; 2]$

Exercice 06 : On a vu que tout compact est fermé

f continue sur E, donc $f^{-1}(K)$ est un fermé

* l'image réciproque de l'intervalle fermée $[-1; 1]$

par la fonction sinus est $\mathbb{R}$ c-à-d $\sin^{-1}([-1;1]) = \mathbb{R}$

tandis que $\mathbb{R}$ n'est pas compact d'où le resultat

~~voulu~~ voulu.