Université de Batna 2 | $3^{ème}$ année mathématiques
Faculté des Mathématiques et d'Informatique | 2019-2020
Département de mathématiques
Optimisation sans contraintes -LMD- S5

Série N 2

Exercice 1. *Vérifier si les ensembles suivants sont convexes :*

1. A=$\{x \in \mathbb{R}^n \backslash \ A_1 x = b_1, \quad et, \ A_2 x \leq b_2\}$. *où* A_1, A_2 *sont deux matrices de* $\mathbb{R}^{m\times n}$, *et* b_1, b_2 *sont deux vecteurs de* $\mathbb{R}^m$.
2. B=$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \ y - x^2 \geq 0\}$.
3. C=$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \ xy \geq 1 \quad et \ x > 0\}$.

Exercice 2. *Les fonction* f *suivantes sont-elles convexes ?*

1. $f_1(x,y) = x^2 + y^2$.
2. $f_2(x,y) = x^2 - xy + 2y^2 - 2x + e^{x+y}$.
3. $f_3(x,y) = (x-2)^4 + (x-2)^2 y^2 + (y+1)^2$.
4. $f_4(x,y) = -x^2 - 2xy - 2y^2$.

Exercice 3. *Pour chacune des fonctions suivantes :*

1. $f_1(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1 - 10x_3 - 2x_1x_3$.
2. $f_2(x_1,x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 - 12x_2 + 20$.
3. $f_3(x_1,x_2) = (x_1^4 + x_2^4) - 2(x_1 - x_2)^2$.

– *Etudier l'existence de points extrémums.*
– *En utilisant une condition d'optimalité du premier ordre déterminer les points critiques.*
– *Préciser à chaque fois leur nature ?*

Exercice 4. *On considère la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par*

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2.$$

1. *Montrer qu'il existe* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$ *(et les déterminer) tels que*

$$f(x,y) \geq \alpha \|(x,y)\|^2 + \beta$$

pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *où* $\|.\|$ *la notation désigne la norme euclidienne de* $\mathbb{R}^2$. *En déduire que le problème*

$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) \qquad (p)$$

possède au moins une solution.

2. *La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$?*
3. *Déterminer les points critiques de f, et préciser leur nature (minimum local, maximum local, point-selle,...). Résoudre alors le problème (p).*

Exercice 5. *Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit*

$$f_a : (x, y) \longrightarrow x^2 + y^2 + axy - 2x - 2y.$$

1. *Pour quelles valeurs de a, la fonction f_a est-elle convexe ? Et strictement convexe ?*
2. *Discuter en fonction des valeurs du paramètre a de l'existence de solutions au problème d'optimisation* $\inf \{f_a(x, y),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
3. *Lorsque $a \in \left]-2, 2\right[$, résoudre le problème précédent.*

Exercice 6. *(Pour l'étudiant)*
Soit $J(v) = \frac{1}{2} < Av, v > - < b, v >$ où A est une matrice symétrique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et $v \in \mathbb{R}^n$, une fonctionnelle quadratique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer les propositions suivantes :

1. *J est convexe si et seulement si A est semi-définie positive.*
2. *J est strictement convexe si et seulement si A est définie positive.*
3. *$\exists u \in \mathbb{R}^n$ tel que : $\forall v \in \mathbb{R}^n - \{u\} \quad J(u) < J(v)$ si et seulement si A est définie positive.*
4. *$\exists u \in \mathbb{R}^n$ tel que : $\forall v \in \mathbb{R}^n \quad J(u) < J(v)$ si et seulement si A est semi-définie positive et l'ensemble $\{w \in \mathbb{R}^n | Aw = b\}$ n'est pas vide.*