Université de Batna –2–
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Introduction à la Topologie
Mme. Hanachi Adalet
2019-2020

TRAVAUX DIRIGÉ 2
2ÈME ANNÉE LICENCE (MA et Stat)

Exercice 1 On munit $E=\{a,b,c\}$ et $F=\{1,2\}$ respectivement des topologies $\tau=\{\emptyset,E,\{a\}\}$ et $\sigma=\{\emptyset,F,\{2\}\}$ et on considère la fonction $f:(E,\tau)\to(F,\sigma)$ définie par $f(a)=f(c)=2, f(b)=1$.
Étudier la continuité de f sur E.

Exercice 2 Soient f et g deux fonctions continues sur un espace topologique E et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'ensemble $A=\{x\in E : 1<f(x)<2\}$ est ouvert.
2. Montrer que l'ensemble $B=\{x\in E : f(x)\leq g(x)\}$ est fermé.

Exercice 3 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $x\mapsto f(x)=x^2$.

1 Étudier la continuité de f dans les cas suivants :

a- $f:(\mathbb{R},\tau_u)\to(\mathbb{R},\tau_u)$.

b- $f:(\mathbb{R},\tau_u)\to(\mathbb{R},\tau)$ avec $\tau=\{\emptyset,\mathbb{R},]a,+\infty[, \quad a\in\mathbb{R}\}$.

c- Que Concluez-vous ?

2- Mêmes questions pour

$$f(x)=\begin{cases} 0; & x<0 \\ x^2+1; & x\geq 0. \end{cases}$$

Exercice 4 Soit f une application telle que

$$f:(E,\tau_1)\to(E,\tau_2); \qquad x\mapsto f(x)=x$$

- Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit continue sur E.

Exercice 5 Soient $(E,\tau_E),(F,\tau_F)$ deux espaces topologiques et f une application de E dans F. Montrer que si f est continue, injective et F est séparé, alors E est séparé.

Exercice 6 Soit f une application de (E,τ_E) dans (F,τ_F). Montrer que

1- (f est ouverte)$\Leftrightarrow$ ($\forall A\in E$ on a $f(Int(A))\subset Int(f(A))$)

2- (f est fermée)$\Leftrightarrow$ ($\forall A\in E$ on a $\overline{f(A)}\subset f(\overline{A})$)

Exercice 7 Soit (E,τ) un espace topologique. On dit qu'une fonction $f:(E,\tau)\to(\mathbb{R},\tau_u)$ est localement constante si, pour tout point x de E, il existe un voisinage V de x tel que f soit constante sur V. Montrer que toute fonction localement constante est continue.

Exercice 8 On considère sur $\mathbb{R}$ la topologie σ jouissant de la base

$$\mathscr{B}=\{[a,b[; \quad a,b\in\mathbb{R}\}$$

1- Montrer que$\mathscr{W}(a)=\{[a,b[; \quad b\in\mathbb{R}\}$ forme un système fondamentale de voisinage du point a.

2- Déterminer la nature des deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par $u_n=\frac{1}{n}$ et $v_n=-\frac{1}{n}$.

3- Étudier la continuité de la fonction $f:(\mathbb{R},\sigma)\to(\mathbb{R},\tau_u)$ telle que $f(x)=-x$

Exercice 9 (Math)

1- Soit f une application d'un espace $E=E_1E_2$ dans un espace F. Montrer que si f est continue en un point $a=(a_1,a_2)\in E$, alors les fonctions partielles $f_1:E_1\to F$ définie par $f_1(x)=(x,a_2)$ et $f_2:E_2\to F$ définie par $f_2(x)=(a_1,x)$ sont continues en a_1 et a_2.

2- Que dire de la réciproque ?