## TD 2 TRIBUS ET MESURES

**Exercice 1**

1/Soit $f$ une application de $(E,\mathcal{T})$ dans $(\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ mesurable .
Montrer que l'ensemble $\{x \in E: f(x)=\alpha\}\quad \forall\, \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable .
2 /Soient $f,g$ deux applications de $(E,\mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}\,,\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurables .
Montrer que les parties suivantes sont mesurables :
$(f=g)=\{x\in E:\ f(x)=g(x)\},\ (f\neq g)=\{x\in E:\ f(x)\neq g(x)\},(\,f>g)=\{x\in E:\ f(x)>g(x)\}$

**Exercice 2 (cours)**

Soient $(E,\mathcal{T})$ un espace mesurable et $f,g$ deux fonctions mesurables de $E$ dans $\mathbb{R}$ .
1 /Montrer que les applications $\sup(f,g)$ , $\inf(f,g)$ , $|f|$ sont mesurables.
2/Donner un exemple d'une application $f$ de $E$ dans $\mathbb{R}$ non mesurable telle que $|f|$ est mesurable. Que peut-on déduire ?

**Exercice 3 (cours)**

Soient $(E,\mathcal{T})$ un espace mesurable ,$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $E$ dans $\mathbb{R}$
On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ( dans $\mathbb{R}$) vers la fonction $f$ pour tout $x\in E$.
Montrer que $f$ est mesurable.

**Exercice 4**

1/Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.On munit $\mathbb{R}$ de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Montrer que si $f$ est continue alors elle est mesurable.
2/Soit $f\ :[a,b]\to\mathbb{R}$ tel que $f$ est mesurable et dérivable.
Montrer que $f'$ est aussi mesurable.

**Exercice 5**

Soient $(E,\mathcal{T})$ un espace mesurable , $f\ :E\to\mathbb{R}$ une fonction mesurable et $\alpha>0$. On définit $f_\alpha$ par :

$$f_\alpha(x)=\begin{cases} f(x) & si\ |f(x)|\leq\alpha \\ \alpha & si\ \ f(x)>\alpha \\ -\alpha & si\ \ f(x)<-\alpha \end{cases}$$

1/Prouver que $f_\alpha(x)=sing\big(f(x)\big)\min(|f(x)|,\alpha)$ avec $sing(y)=\frac{y}{|y|}$ , $y\neq 0$.
2 /On déduire ,en utilisant deux méthodes ,que la fonction $f_\alpha$ est mesurable.

**Exercice 6**

Les fonctions suivantes sont-elles boréliennes ?

$$f_1:\ x\in\mathbb{R}^2\longmapsto f_1(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$f_2:\ x\in\mathbb{R}\longmapsto f_2(x)=\exp(cosx)\in\mathbb{R}_+\quad ,\qquad f_3:\ x\in\mathbb{R}\longmapsto f_3(x)=1_{\mathbb{Q}}\in\mathbb{R}_+$$

**Exercice 7 (cours)**

Soient $(E,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré ,$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $E$ dans $\mathbb{R}$.
1 /Montrer que : $\mu(E)<\infty\ et\quad \lim\limits_{n\to\infty}f_n=f\quad (p.p)\Longrightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty}f_n=f\quad (c.\mu)$
2/Soient $([0,1[,\mathcal{B}([0,1[\,,\lambda)$ espace mesuré de Lebesgue, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie par :
$f_n=1_{\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right[}$ ,montrer que $f_n\ \to 0$ en mesure, mais $f_n$ ne converge pas vers 0 presque partout.