Université de Batna 2 **$2^{ème}$ année Mathématiques**

Faculté de mathématiques et d'informatique **2018-2019**

Département de mathématiques **Module : Analyse 04**

SERIE 2

Exercice 1: Soient $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ f(x,y,z)=(x+y, x-y+z, x+y)$ et $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ g(x,y,z)=(x^2,y^2,z^2)$ deux fonctions, calculer les matrices Jacobiennes des fonctions suivantes $f, g, f+g, f\circ g, g\circ f, g^n, n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 2: 1) Calculer les dérivées partielles de la fonction $h(x,y)=g(u(x+y),v(x-y))$ dans le cas où $g(u,v)=u^2v,\ u(t)=t$ et $v(t)=t^2$.

2) Calculer $F'(t)$ où $F(t)=f(x(t),y(t))$ avec $f(x,y)=x^2+y^2+xy,\ x(t)=\sin t$ et $y(t)=e^t$.

Exercice 3 : Soit $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par:

$$f(x,y)=\begin{cases} g(x,y) \ \ si\,(x,y)\neq(0,0)\,/\,\text{avec}\, g:\mathbb{R}^2/\{(0,0)\}\to\mathbb{R} \\ 0\,si\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1) Si $g(x,y)=xy/(x^2+y^2)$ montrer que f n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$ mais elle est dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles.
2) Si $g(x,y)=|x|+|y|$ montrer que f est continue mais elle n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}^2$.
3) Si $g(x,y)=y/(x^2+y^2)$ montrer que f n'est ni continue ni dérivable sur $\mathbb{R}^2$.
4) $g(x,y)=x^2y/(x^2+y^2)$ montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et est dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles. f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?
5) Si $g(x,y)=xy\sin(1/(x^2+y^2))$ montrer que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ mais elle est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
6) Que peut –on conclure ?

Exercice 4 : Soit $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x,y)=\begin{cases} x^2y^2/(x^2+y^2) \ si\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0\ si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. 2) Calculer $\nabla f(x,y)\, si\,(x,y)\neq(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

3) Montrer que f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$. 4) Que peut-on dire sur la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5 : Soit $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$f(x,y)=\begin{cases} (xy)(x^2-y^2)/(x^2+y^2)\ si\,(x,y)\neq(0,0) \\ 0\,si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1) Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et calculer $\nabla f(x,y)$.

2) Montrer que f admet des dérivées secondes en tout point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

3) Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$. Que peut-on déduire ?

Exercice 6 : Soit $f(x,y)=\sqrt{3x-y}$ définie sur $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 3x-y\geq 0\right\}$

1) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y), \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y), \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y), \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$.
2) Ecrire un D.L de f d'ordre 1 au voisinage du point $(1,2)$.
3) Ecrire un D.L de f d'ordre 2 au voisinage du point $(1,2)$.
4) Montrer en utilisant la définition que la différentielle de f existe au point $(2,2)$.
5) Ecrire l'équation du plan tangent au point $(2,2)$.
6) Déduire une valeur approchée de $f(2.01,1.99)$ et la comparer avec sa valeur exacte obtenue directement de l'expression de f.

Exercice 7 : Soit $f(x,y)=\dfrac{1+x+y}{1+x-y}$ une fonction définie sur : $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x\neq y-1\right\}$

1) En utilisant le D.L de $1/(1+u)$, écrire un D.L d'ordre 2 de f au voisinage de $(0,0)$.
2) Par identification avec la formule théorique, déduire sans calcul
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0), \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0), \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$. (Justifier leur existence d'abord)

Exercice 8 : Une montagne ayant la forme d'une surface $z(x,y)=2xy-x^2-2y^2-8x+6y+4$.

Si le niveau de la mer correspond à $z=0$ qu'elle est la hauteur de cette montagne ?

(L'unité de mesure est 100 mètres).

Exercice 9 : Soit $f(x,y)=y^2+x.y\ln x$

1) Déterminer D le domaine de définition de f et montrer qu'elle est de classe C^2 sur D.
2) Etudier les points critiques de f et discuter leur nature.

Exercice 10 : Trouver les extrémums des fonctions suivantes :

1) $p(x,y)=x^2+y^2-xy+x+y$. 2) $q(x,y)=\dfrac{xy^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-4x+y^2$.

3) $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{2}+x^3+\dfrac{y^3}{3}-4y$. 4) $g(x,y)=(x^2-y^2)e^{-x^2-y^2}$. 5) $h(x,y)=x(\ln x)^2+xy^2$.