

Université de Batna 2  
Faculté de M I  
Département de Mathématiques  
3ème année, module EPM-2019/2020

## Travaux Dirigés 2

### Exercice 1.

Résoudre les problèmes aux limites du premier ordre suivants par la méthode des caractéristiques et tracer le domaine d'étude:

#### 1-Le premier problème:

$$\begin{cases} \partial_{x_1} u + \partial_{x_2} u = u^4, & \text{si } (x_1, x_2) \in \Omega \\ u(x) = f(x), & (x_1, x_2) \in \Gamma \subset \partial\Omega \end{cases}$$

où  $\Omega = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_2 > 0\}$  et  $\Gamma = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_2 = 0\}$

#### 2-Le deuxième problème:

$$\begin{cases} \partial_x u + 3\partial_y u = u, x \in \mathbb{R} \\ u(x, y) = \sin y \text{ si } y = \theta x, \end{cases}$$

avec  $\theta$  une constante réelle.

#### 3- Le troisième problème:

$$\begin{cases} u_{x_2} - x_1 u_{x_1} = 2u, x \in \Omega \\ u(x_1, x_2) = h(x^2 + 1), x \in \Gamma \end{cases}$$

où  $\Omega = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 > 0 \text{ et } x_2 > 0\}$  et  $\Gamma = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_2 = 0\}$

### Exercice 2.

En utilisant la méthode des caractéristiques résoudre le problème:

$$\begin{cases} (u_{x_1})^2 + (u_{x_2})^2 = 1, \text{ sur } \Omega \\ u(x_1, 2x_2) = 1, \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

### Exercice 3.

Soit le problème D'EDP du premier ordre suivant:

$$\begin{cases} u_{x_1} u_{x_2} = u, & (x_1, x_2) \in \Omega \\ u(x_1, x_2) = x_2^2, & (x_1, x_2) \in \Gamma \end{cases} \quad (1)$$

où  $\Omega = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 > 0\}$  et  $\Gamma = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 = 0\}$ .

1- Tracer le domaine d'étude.

2- Utiliser la méthode des caractéristiques pour déterminer une solution à ce problème.

**Exercice 4.**

On considère le problème suivant:

$$\begin{cases} u_x + u_y + u = e^{x+2y}, \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Résoudre ce problème par la méthode des caractéristiques et que représentent les courbes caractéristiques associées.

**Exercice 5.**

Soit l'EDP suivante:

$$\partial_t u(t, x) + c(t, x) \partial_x u(t, x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

1- Que représente cette EDP Physiquement?

2- Trouver une solution à cette EDP en posant  $c(t, x) = -tx$  et que représentent les courbes caractéristiques dans ce cas.

**Exercice 6.**

Utiliser la méthode des caractéristiques pour résoudre le problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} u_x + 3y^{\frac{2}{3}} u_y = 2, \\ u(x, 1) = 1 + x \end{cases}$$