Département de Mathématiques
Faculté de Mathématiques et Informatique
Université : Batna 2 (2019-2020)

Série de TD 2.
Approximation au sens des moindres carrées

Exercice 1.
Soient $P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x, (x \in \mathbb{R})$ et les points $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2.$

1. Les polynômes P_0 et P_1 sont-ils orthogonaux, par rapport au produit scalaire euclidien ? (voir les deux cas "discret et continu").
2. Même question avec les mêmes points et $P_0(x) = 1$ et $P_1(x) = x - 1$.

Exercice 2.
On cherche à approximer la fonction $f : x \to x^3$, dans l'espace $\mathbb{P}_2[x]$.
Considèrons le produit scalaire : $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx,\ \forall f, g \in \mathcal{C}([0, 1])$.

1. Construire une base orthogonale à partir de la base canonique $\{1, x, x^2\}$.
2. A l'aide de cette nouvelle base déterminer la meilleure approximation de f au sens des moidres carrées, dans $\mathbb{P}_2[x]$.

Exercice 3. (Supplémentaire)
Trouver le polynôme p qui réalise le minimum suivant :

$$\min_{p\in\ \mathbb{P}_2[x]} \left(\int_{-1}^{1} (p(x) - |x|)^2\, dx \right).$$

Exercice 4.(Supplémentaire)
Soit $p^* \in \mathbb{P}_m[x]$ le meilleure approximant, au sens des moindres carrées, de la fonction f dont on connait les valeurs $\{f(x_i)\}_{i=0}^{n}$. Monter que si $m = n$ alors p^* n'est que l'interpolant de f aux points $(x_i)_{i=0}^{n}$.

Exercice 5.
Soit f une fonction passant par les points suivants :
$(-2, 17)\,; (-1, 4)\,; (0, 3)\,; (1, 8)$ et $(2, 61)$.

1. Déterminer le polynôme $P^* \in \mathbb{P}_2[x]$, de la M.A.S.M.C discrète de f.
2. Donner la table des différences divisées de f et en déduire le polynôme interpolant f.
3. Calculer $f(0.5)$ par les deux méthodes. Conclure.

Exercice 6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on considère l'espace suivant :

$$G = \left\{ a \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + b\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \ / \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

On cherche à approximer, dans G et au sens des moindres carrées, la fonction

$$f : x \to \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \ \text{(pour } x \in [0,2]).$$

1. Si on prend les points $x_i = i$, pour $i = 0, 1, 2$. Trouver la M.A.S.M.C discrete de f, en ces points.
2. Refaire la question 1 avec les 5 points équidistants dans $[0, 2]$.
3. Trouver la M.A.S.M.C continue de f.
4. Que remaque t-on ? Justifier ces résultats.

Exercice 7.(Supplémentaire)

Soit la fonction $f(x) = x^3 - 1$ définie sur $[-1, 1]$.

1. Déterminer p l'interpolant de f aux points $\{-1, -0.5, 0.5, 1\}$.
2. Déterminer p_3^* la M.A.S.M.C continue de p.
3. Déterminer p_3' la M.A.S.M.C discrète de p_3^* aux points $\{-1, -0.5, 0.5, 1\}$. Conclure.
4. Quel est le meilleur choix du degré dep_m^*réalisant la M.A.S.M.C de f ?
5. Déterminer ce polynôme puis tracer le dans le même plan.

Exercice 8. (Supplémentaire) À partir des données suivantes :

x_i	1,1	1,8	2,5	4
$g(x_i)$	5,25	9,55	15,72	33,77

1. Calculer la droite (respectivement la parabole) qui réalise la M.A.S.M.C de g.
2. Calculer les erreurs obtenues dans les deux cas.Que remarque t-on ?
3. Justifier géométriquement les résultats obtenus.