Université de Batna 2. Semestre 2, 2019.
Mathématiques L3. **Module:** Analyse Numérique des EDO's et EDP's

Série d'exercices $N°3$.
Étude théorique des schémas numériques des EDO's.

Exercice 1 *Soit* $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}^n)$; $n \geq 1$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ *et* y *est la solution maximale du problème de Cauchy suivant :*

$$(PC) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

On se donne une discrétisation de $[0, T]$, *définie par* $N \in \mathbb{N}$ *et* $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$. *On pose :* $h_k = t_{k+1} - t_k$; $\forall k = 0, \ldots, N-1$.
Pour la résolution numérique du problème (PC), on considère le schéma de discrétisation suivant :

$$\begin{cases} y_0 \text{ donné}, \\ \dfrac{y_{k+1} - y_k}{h_k} = \frac{1}{2}\left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + h_k f(t_k, y_k))\right]. \end{cases}$$

Montrer que ce schéma est convergent d'ordre 2.

Exercice 2 *On considère le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \; t \in [a, b] \\ y(a) = y_0. \end{cases} \tag{E}$$

où $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$ *et* $f : [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $[a, b] \times \mathbb{R}$ *et Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. On notera* $Y(t)$ *la solution exacte de (E).*
Pour résoudre numériquement (E), on propose le schéma numérique suivant

$$\begin{cases} y_0 = Y_0 \\ y_{n+1} = y_n + \alpha h f(t_n, y_n) + \beta h f(t_n + \lambda h, y_n + \lambda h f(t_n, y_n)), 0 \leq n \leq N-1. \end{cases} \tag{S}$$

où $\lambda \in]0, 1]$ *est fixé,* α, β *sont des réels à choisir au mieux,* $h = \frac{b-a}{N}$ *et* $t_n = a + nh, 0 \leq n \leq N (N \in \mathbb{N}$ *fixé),* y_n *étant une approximation de* $Y(t_n)$.

1. *Montrer que le schéma (S) est stable pour tout choix de* α *et* β.
2. *Déterminer une condition sur* α *et* β *pour que le schéma (S) soit consistant avec le problème (E).*
3. *En déduire une condition sur* α *et* β *pour que le schéma (S) converge.*

4. *Déterminer α et β en fonction de λ, pour que le schéma (S) soit d'ordre 2 (au moins).*

5. *En déduire qu'il existe une constante $K > 0$ telle que :*

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y_n - Y(t_n)| \leq K.h^2$$

Exercice 3 *On considère l'équation différentielle*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \ t \in [0, r] \\ y(0) = \alpha. \end{cases} \tag{E}$$

où $f : [0, r] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.
Pour approcher le problème (E), on considère le schéma numérique suivant :

$$\begin{cases} y_0 = \alpha \\ y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h), \ n \geq 0. \end{cases} \tag{S}$$

avec $\Phi(t, y, h) = aK_1 + bK_3$, où a et b sont deux constantes qu'il faudra déterminer.
On a $K_1 = f(t, y)$, $K_2 = f(t + \frac{h}{3}, y + \frac{h}{3}K_1)$ et $K_3 = f(t + \frac{2h}{3}, y + \frac{2h}{3}K_2)$.

1- *Quelle relation lie a et b pour que le schéma (S) soit consistant?*

2- *Ce schéma est-il stable quelque soit a et b dans $\mathbb{R}$.*

3- *Déterminer a et b pour que ce schéma soit au moins d'ordre 2.*

4- *Montrer alors que ce schéma est en fait d'ordre 3.*

Exercice 4 *Montrer que la formule de Milne*

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}(f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1})$$

est une méthode multipas d'ordre 4 qui est stable. Expliquer pourquoi ses coefficients sont les mêmes que pour la formule de quadrature de Simpson.

Exercice 5 *(a) Appliquer la méthode d'Adams explicite*

$$y_{n+1} = y_n + h(\frac{3}{2}f_n - \frac{1}{2}f_{n-1})$$

avec $h = 1/8$ au problème $y' = y^2$, $y(0) = 1$ pour approcher $y(1/2)$. Pour y_1 utiliser la valeur obtenue par la méthode d'Euler explicite.

(b) *Appliquer la méthode d'Euler explicite au même problème, également avec* $h = 1/8$.

(c) *Comparer les deux résultats numériques avec la solution exacte* $y(1/2) = 2$.

Exercice 6 *On s'intéresse au problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \ t \geq 0 \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

On choisit un pas h*, on définit les instants* t_n $(n \geq 0)$*, et on note* $f_n = f(t_n, y_n)$*.Soit le schéma à 2 pas défini par :*

$$y_{n+1} + \alpha_0 y_n + \alpha_1 y_{n-1} = h\beta f_{n+1}. \tag{1}$$

1. *Le schéma (1) est-il explicite ou implicite?*
   Pour cette méthode, l'erreur locale de consistance est donnée par

   $$\tau_n = y(t_{n+1}) + \alpha_0 y(t_n) + \alpha_1 y(t_{n-1}) - h\beta f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$$

   Par définition, la méthode (1) est d'ordre p *si* $\tau_n = O(h^{p+1})$.

2. *On suppose que la solution* y *est de classe* C^3 *et :* $y(t_n) \neq 0$, $y'(t_n) \neq 0$ *et* $y''(t_n) \neq 0$.
   Déterminer les coefficients α_0, α_1 *et* β *de sorte que la méthode (1) soit d'ordre 2.*

3. *En déduire que la méthode s'écrira*

   $$y_{n+1} - \frac{4}{3}y_n + \frac{1}{3}y_{n-1} = \frac{2h}{3}f_{n+1}.$$

4. *On étudie par la suite, la stabilité de ce schéma en l'appliquant au problème :*

   $$\begin{cases} y'(t) = -\lambda y(t), \ t \geq 0 \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

   où $\lambda > 0$ *est un paramètre réel, vérifiant que les* y_n *satisfont la relation suivante :*

   $$y_{n+1}(1 + \frac{2\lambda h}{3}) - \frac{4}{3}y_n + \frac{1}{3}y_{n-1} = 0.$$