UNIVERSITE DE BATNA 2 **ANNEE : 2019- 2020**
MESURE ET INTEGRATION **3EME ANNEE LICENCE MATHEMATIQUE**

TD 3 FONCTIONS INTEGRABLES

Exercice 1(cours)

1/Calculer l'intégrale de Lebesgue sur l'intervalle $[0,+\infty[$ des fonctions f et g tel que :

$$f(x) = e^{-[x]} \;\; et \;\; g(x) = \frac{1}{[x]!} \;\; , [x] = \{n \in \mathbb{N};\; n \leq x < n+1\}.$$

2 /Calculer l'intégrale $\int f\, d\lambda$ t.q: $E = [0,1]$ et $f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & si \quad x \in [0,1]\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

Exercice 2

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\overline{\mathbb{R}_+}$

Montrer que $\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu.$

Exercice 3 (cours)

1 /Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ dans $\overline{\mathbb{R}_+}$, t.q: $f_n(x) = 1 - e^{-n\cos x}$

Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} f_n\, d\lambda.$

2/Calculer l'intégrale : $\int_{[0,1]} \frac{-\ln(1-x)}{x}\, d\lambda.$

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

$1/\forall a,b \in \mathbb{R} \quad \lim\limits_{n\to\infty} \int_{[a,b]} (cos x)^n\, d\lambda$, 2 / $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{[0,1]} (1-\frac{1}{n})^n\, e^{\frac{n}{2n+x}}\, d\lambda$.

Exercice 5 (cours)

Soit $(E,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré, $f \in \mathcal{M}^+$(fonctions mesurables positives)

Montrer que : $\int_E f\, d\mu = 0 \iff f = 0 \;\; PP$

Exercice 6

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ t.q: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Montrer que :$\forall n \in \mathbb{N};\;\; \int_E f_n\, d\mu \leq M \;\Rightarrow\; \int_E f\, d\mu \leq M$.

Exercice 7

Soient $(E,\mathcal{T})$ un espace mesurable et $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$une suite de mesure sur $\mathcal{T}$.
On suppose que :$m_{n+1} \geq m_n$ pour tout $A \in \mathcal{T}$ et tout $n \in \mathbb{N}$.
On pose $m(A) = \sup\{m_n(A),\; n \in \mathbb{N}\}$ pour tout $A \in \mathcal{T}$.
1/Montrer que m est une mesure.
2/Soit $f \in \mathcal{E}^+(E,\mathcal{T})$ (fonctions étagées mesurables positives)

Montrer que : $\int_E f\, dm = sup \int_E f\, dm_n$

3/Soit $f \in \mathcal{M}^+(E,\mathcal{T})$,montrer que : $(\int f\, dm_n)_{n\in\mathbb{N}}$est une suite majorée par $\int_E f\, dm$.

4/Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f\, dm_n = \int_E f\, dm.$

5/ Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,\mathcal{T},m)$, montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,\mathcal{T},m_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que
$\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f\, dm_n = \int_E f\, dm.$