Université de Batna **$2^{ème}$ année Mathématiques**

Faculté de mathématiques et d'informatique **2018-2019**

Département de mathématiques **Module : Analyse 03**

Série 3

Exercice 1 : Soit la série de fonctions définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\sum_{n\geq 0} x(1-x)^n$.

1) Démontrer la convergence simple de cette série dans $[0,2[$
2) A-t-on la convergence uniforme sur $[0,2[$?

Exercice 2 : Etudier la convergence simple puis normale et uniforme des séries de fonctions dont les termes généraux sont :

1) $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}; n \geq 0 / x \in \mathbb{R}$; 2) $f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$; $n \geq 0 / x \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 3 : Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n^2x^2+n}$.

Montrer que cette série converge absolument et uniformément mais pas normalement Sur $]0,1]$.

N.B : une série $\sum u_n(x)$ est absolument convergente si la série $\sum |u_n(x)|$ est convergente.

Exercice 4 : Soit la fonction définie pour chaque $x \in \mathbb{R}$ par: $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{e^{-nx}}{n}$.

1) Etudier la convergence simple de la série et en déduire le domaine de définition de f.
2) Montrer que la série converge uniformément sur $[a,+\infty[$; $\forall a > 0$ et en déduire le domaine de continuité f.
3) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et exprimer sa dérivée à l'aide de fonctions élémentaires.

Exercice 5 : Soit la **série** de fonctions $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\sin nx}{n^3}$.

1) Montrer sa convergence simple sur $\mathbb{R}$ et déterminer le domaine de définition et de continuité de la fonction f définie par $f(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{\sin nx}{n^3}$.
2) Montrer que $\int_0^x f(x)dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^4}$.

3) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n^2}$.

Exercice 6 : Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1) $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$. 2) $\sum_{n\geq 0} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} x^n$. 3) $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{3^n - n}$. 4) $\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{1+b^n} x^n \, (a \geq 0 \wedge b \geq 0)$.

Exercice 7 : a) Calculer les sommes suivantes dans leur domaine de convergence :

1) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$. 2) $\sum_{n=0}^{+\infty} (1+n)x^n$. 3) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n}{n+2} x^n$.

b) Développer en série entière les fonctions suivantes (déterminer le domaine de développement) :

$f_1(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$; $f_2(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$; $f_3(x) = \int_0^x \cos t^2 dt$.

Partie supplémentaire (Examen d'analyse 03 : 2014-2015)

Exercice 1 : Etudier la nature des séries suivantes :

1) $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{n!}$. 2) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{2^n} x^n$. 3) $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. 4) $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n \cos n}{n\sqrt{n}+2}$.

Exercice 2 : Soit la suite de fonctions $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par : $f_n(x) = \ln\left(e^x + \frac{x}{n}\right)$.

1) Montrer que la suite $\{f_n\}$ converge simplement vers une fonction qu'on notera f.

2) Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[: f_n(x) - f(x) \geq 0$ et que f_n converge uniformément vers f sur $[0, +\infty[$.

3) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

Exercice 3 : Soit la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n(n+2)}$.

1) Déterminer R son rayon de convergence et étudier la convergence pour $x = R$ et $x = -R$.

2) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$ (utiliser le développement en série entière de $\ln(1-x)$ en 0).

3) Montrer que $\forall x \in]0, R[\cup]-R, 0[: \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+2)} = \left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2}\right)\ln(1-x) + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4}$.