Université de Batna 2. Mathématiques (L2) **Topologie** Semestre 3 (18-19)

Série d'exercices N° 4

Les espaces métriques complets.

Exercice 1

Utiliser le critère de Cauchy pour étudier la convergence des deux suites suivantes :

(i) $u_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$;

(ii) $v_n = \dfrac{\sin 1}{2} + \dfrac{\sin 2}{2^2} + ... + \dfrac{\sin n}{2^n}$.

Exercice 2

L'espace $(\mathbb{R}, d)$ *est-il complet pour l'une des métriques suivantes ?*

1. $d(x, y) = |x^3 - y^3|$,
2. $d(x, y) = |\exp x - \exp y|$,
3. $d(x, y) = \log(1 + |x - y|)$.

Exercice 3

On munit $\mathbb{R}_+$ *par deux distances* $d(x, y) = |x - y|$ *et* $d'(x, y) = |x^2 - y^2|$. *Montrer que :*

(1) d *et* d' *sont topologiquement équivalentes.*

(2) d *et* d' *ne sont pas équivalentes.*

Exercice 4

$E =]0, +\infty[$. *Pour* x *et* y *dans* E, *on pose :* $\delta(x, y) = |\log x - \log y|$

1. *Vérifier que* δ *est une distance sur* E.
2. *Soit* d *la distance usuelle sur* E. *Montrer que* d *et* δ *sont deux distances topologiquement équivalentes, c'est-à-dire que :* U *est un ouvert de* (E, d) *si et seulement si* U *est un ouvert de* (E, δ).
3. *Montrer que* (E, d) *n'est pas complet.*
4. *La suite* $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ *est-elle convergente dans l'espace métrique* (E, d) *? Est-elle une suite de Cauchy dans* (E, δ) *?*
5. *Montrer que l'espace métrique* (E, δ) *est complet.*

Exercice 5

Soient E *et* F *deux espaces métriques et* $f : E \to F$ *une application. On suppose que l'image par* f *de toute suite de Cauchy de* E *est une suite de Cauchy dans* F. *Montrer que* f *est continue.*

Exercice 6

Montrer que les deux fonctions suivantes sont contractantes.

1. $f : ([0, 1], |.|) \to ([0, 1], |.|)$ *définie par :* $f(x) = \dfrac{1}{2} . \dfrac{x}{1 + x^2}$
2. $g : ([1, +\infty[, |.|) \to ([1, +\infty[, |.|)$ *définie par :* $g(x) = \dfrac{x^2 + 2}{2x}$

Exercice 7

Montrer que la fonction $f : (\mathbb{R}, |.|) \to (\mathbb{R}, |.|)$ *définie par* $f(x) = \dfrac{1}{5}\sin(2x) - \dfrac{2}{5}x$ *s'annule en une valeur unique à déterminer.*

Exercice 8

Soit $f : (\mathbb{R}, |.|) \to (\mathbb{R}, |.|)$ *définie par* $f(x) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{1 + x^2})$.

1. *Montrer que* $\forall x, y \in \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| < |x - y|$
2. *Montrer par l'absurde que* f *n'admet aucun point fixe dans* $\mathbb{R}$. *Pourquoi ?*

Exercice 9

Soit $f : [0, \pi/2] \to [0, \pi/2]$ *la fonction* $x \mapsto \cos(x)$

1. *Montrer que la fonction* f *est lipschitzienne, non contractante mais* f^2 *est contractante.*
2. *Déduire que* f *admet un unique point fixe.*