Département de Mathématiques
2 ème année (2018/2019)

Série d'exercices 2 (Géométrie)

Exercice 1 : *On considère l'éllipse d'équation*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad où \ \ a, b \in \mathbb{R}_+^*, \ et \ \ a \geq b.$$

1. *Donner une paramétrisation de l'éllipse.*
2. *Donner l'abscisse curviligne de l'élipse.*
3. *Calculer la courbure de l'élipse en tout point.*
4. *Quels sont les points les plus courbés?*
5. *Déterminer le repère de Frenet.*

Exercice 2 : *Soit R un nombre réel positif. On considère le cycloïde de représentation paramétrique*

$$M(t) = \begin{cases} x(t) = & R(t - \sin t) \\ y(t) = & R(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

1. *Calculer la longueur de cycloïde.*
2. *Claculer le repère de Frenet.*
3. *Calculer la courbure $\rho(t)$ de M en tout point.*
4. *Détrminer l'ensemble des centres de courbure de M (la développée de M).*
5. *Calculer $C_M(t + 2\pi)$.*

Exercice 3 : *Soit S la surface de représentation paramétrique $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par:*

$$f(u, v) = \begin{cases} x(u, v) = & u \\ y(u, v) = & v^3 \\ z(u, v) = & u - v \end{cases}$$

1. *Montrer que la surface S est régulière.*
2. *Soit $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la courbe paramétrée définie par* $M(t) = \begin{cases} x(t) = & 3t \\ y(t) = & t^6 \\ z(t) = & 3t - t^2 \end{cases}.$

   Montrer que M une courbe régulière.
3. *Déterminer la courbe $\widetilde{M} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, telle que $M = f \circ \widetilde{M}$. Que représente la courbe M par rapport à la surface S.*
4. *Déterminer le plan tangent au point $m_0 = f(0, 0)$ à la surface S. Que représente géométriquement le plan tangent de S au point $m_0 = f(0, 0)$?*