Université de Batna 2 Année universitaire: 2019/2020.
Département de Mathmatiques
Master 1

Analyse fonctionnelle appliquée
Série d'exercices n°2

Exercice 1 *Soit* $H = L^2([a,b])$ *et* $K \in L^2([a,b] \times [a,b])$. *Soit* T *l'opérateur défini par*

$$(Tf)(x) = \int_a^b K(x,t) f(t) dt.$$

1. *Montrer que* T *est linéaire borné sur* H.
2. *On suppose que* K *est de la forme* $K(x,t) = \sum_{j=1}^{N} a_j(x) b_j(t)$, *où* $a_j, b_j \in H$. *Montrer que* T *est un opérateur de rang fini.*

Exercice 2 *Soient* X *un espace de Banach et* B *un sous espace vectoriel de* X, *tel que l'ensemble* $\{f(x), x \in B\}$ *soit borné dans* $\mathbb{R}$, *pour toute* $f \in X^*$, *avec* X^* *est le dual topologique de* X. *Pour tout* $b \in B$, *on note*

$$T_b : \begin{array}{ccc} X^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(b) \end{array}$$

1. *Montrer que* $\sup_{b \in B} \|T_b\| < \infty$.
2. *Montrer que* $\sup_{\|f\|=1} |f(b)| = \|b\|$.
3. *Conclure que* B *est une partie bornée de* X.

Exercice 3 *Soit l'espace de Banach* $l^1 = \{(x_n) \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$ *muni de la norme* $\|(x_n)\|_1 = \Sigma_{n=1}^{\infty} |x_n|$ *et soit* l_∞ *l'espace de Banach des suites réelles bornées muni de la norme* $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n \geq 1} |x_n|$, *on fixe une suite* $y = (y_n) \in l_\infty$ *et on considère l'application* $\phi_y : l^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$\phi_y(x) = \phi_y((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n.$$

1. *Montrer que* ϕ_y *est une forme linéaire continue sur* l^1.
2. *Soit* $f \in (l^1)'$ *une forme linéaire continue et* (e_n) *la base canonique de* l^1. *Posons* $f_n = f(e_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. *Montrer que la suite* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (f(e_n))_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_\infty$ *et* $\|(f_n)\|_\infty = \|f\|_{(l^1)'}$.
3. *Soit* $J : l_\infty \longrightarrow (l^1)'$ *une application définie par* $J((f_n)) = f$, *avec* $f_n = f(e_n)$. *Montrer que* J *est une isométrie bijective de* l_∞ *dans* $(l^1)'$.
4. *Déduire le dual de* l^1 $((l^1)')$.

Exercice 4 *Déterminer l'adjoint de l'opérateur* T *défini dans l'exercice 1.*

Exercice 5 *: Soient* H_1 *et* H_2 *deux espaces de Hilbert et* $T : D(T) \subset H_1 \to H_2$ *un opérateur linéaire de domaine dense et* $J : H_1 \times H_2 \to H_2 \times H_1$ *définie par* $J(h_1, h_2) = (-h_2, h_1)$.

1. *Montrer que J est linéaire continue et bijective et $J^* = J^{-1}$.*

2. *Montrer que $G(T^*) = [J(G(T))]^{\perp}$.*

3. *Déduire que T^* est un opérateur fermé.*

Exercice 6 *Soit $H = L^2(0,1)$, on définit sur H les opérateurs $T_1 = i\frac{d}{dx}$ et $T_2 = i\frac{d}{dx}$ leurs domaines sont comme suit*

$$D(T_1) = \{f \in H : f \text{ est absolument continue et } f' \in H \text{ et } f(0) = f(1)\}.$$

$$D(T_2) = \{f \in H : f \text{ est absolument continue et } f' \in H \text{ et } f(0) = f(1) = 0\}.$$

1. *Déterminer T_1^* l'adjoint de T_1. Déduire que l'opérateur T_1 est fermé.*

2. *Déterminer T_2^* l'adjoint de T_2.*

3. *Est ce que T_2 est auto adjoint?*